J. Müller

WS 2005/2006
20.12.2005

8. Übung zur Analysis I
Abgabe: Montag, 09.01.2006, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G19: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(i)}\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu}}\,, \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-1/\nu)^\nu\,, \qquad \text{(iii)}\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{10^\nu}{\nu^\nu}.$$

G20: Es sei (a_ν) eine Folge in $\{0,1,\ldots,9\}$. Zeigen Sie: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{10^\nu}$ ist konvergent mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{10^\nu} \le 1\,.$$

G21: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$a_{2j} \to a\,, \qquad a_{2j-1} \to b \qquad (j \to \infty)\,.$$

Zeigen Sie:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \max\{a,b\}\,, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \min\{a,b\}\,.$$

Hausübungen

H22: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$, und es sei

$$\sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

a) Zeigen Sie: Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a$.

b) Geben Sie eine divergente Folge (a_n) an, für die die entsprechende Folge (σ_n) konvergiert.

H23: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu}}{\nu^2+\nu}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu (q+1/\nu)^\nu$, wobei $q>0$ fest ist,

(iii) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})$.

H24: a) Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Beweisen Sie:

(i) Es gilt

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .$$

(ii) Ist $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ konvergent, so ist auch $(\sqrt[n]{|a_n|})$ konvergent mit

$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

b) Zeigen Sie:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e \qquad (n \to \infty)\,.$$

Zusatzaufgaben

Z1: Es sei $s_n := \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n s_n}$ konvergent?

Z2: Es sei $x>1$. Ist $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(\sqrt[\nu]{x}-1)$ konvergent?

Z3: Es sei $\alpha>0$. Ist $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\nu$ konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{2005}{2006}\right)^\nu$.

Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches Jahr $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{2005}{2006}\right)^\nu$ *wünscht das Analysis-Team.*