J. Müller

WS 2005/2006
13.12.2005

7. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 19.12.2005, vor der Übung

Gruppenübungen

G16: Zeigen Sie: Ist A mit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben (bzw. unten) beschränkt, so existiert eine Folge (a_n) in A mit $a_n \to \sup A$ (bzw. $a_n \to \inf A$).

G17: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}$ heißt Verdichtungspunkt von (a_n), falls eine Teilfolge (a_{n_j}) von (a_n) existiert mit $a_{n_j} \to a$ $(j \to \infty)$. Wir setzen

$$V((a_n)) := \{a \in \mathbb{K} : a \text{ Verdichtungspunkt von } (a_n)\},.$$

a) Geben Sie jeweils eine Folge (a_n) an mit
   (i) $V((a_n)) = \{1, -1\}$,
   (ii) $V((a_n)) = \emptyset$.

b) Zeigen Sie: Ist (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so gilt

$$\{\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n\} \subset V((a_n)) \subset [\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n],$$

G18: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist.

Hausübungen

H19: Unter der Internet-Adresse

www.steuerlexikon-online.de/Abschreibung_degressiv.html

finden Sie eine Beschreibung der gesetzlichen Regelungen zur degressiven Abschreibung. Leiten Sie eine geschlossene Darstellung für die Gesamtsumme der Abschreibungsbeträge nach $N\,(\geq 10)$ Jahren bei maximalem Abschreibungsgsatz (und Nutzungsdauer von N Jahren) her.

H20: a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ist die Menge $\mathbb{Q} \cap (x, y)$ unendlich.

b) Geben Sie eine beschränkte Folge (a_n) an mit $\underline{\lim}\, a_n < \overline{\lim}\, a_n$ und $V((a_n)) = [\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n]$.

H21: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt diskret, falls ein $\delta > 0$ so existiert, dass $|x-y| \geq \delta$ für alle $x, y \in D$ mit $x \neq y$ gilt. Zeigen Sie: Ist $D \neq \emptyset$ diskret und nach oben (bzw. unten) beschränkt, so existiert $\max D$ (bzw. $\min D$).