J. Müller WS 2005/2006

06.12.2005

# 6. Übung zur Analysis I

## Gruppenübungen

G13: Die Folge $(a_n)$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0\,, \qquad a_{n+1} := \frac{3}{4}\,a_n + \frac{1}{4} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

G14:
a) Es sei $(a_n)$ eine Folge in $[0, \infty)$. Zeigen Sie: Ist $(a_n)$ nicht konvergent gegen 0, so existieren ein $\delta > 0$ und eine Teilfolge $(a_{n_j})$ von $(a_n)$ mit $a_{n_j} \geq \delta$ für alle $j \in \mathbb{N}$.
b) Es sei $x \geq 1$. Untersuchen Sie die Folge $(\sqrt[n]{x})_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

G15: Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Ist $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, so gilt $1/a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ oder $1/a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$.
b) Ist $(a_n)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq a$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq a$.
c) Ist $(a_n)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n < a$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < a$.

## Hausübungen

H16: Zeigen Sie: Ist $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sind $A_\alpha$ $(\alpha \in I)$ Dedekindsche Schnitte, so ist entweder $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha = \mathbb{Q}$ oder $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ ist wieder ein Dedekindscher Schnitt.

H17: Es sei $x > 0$ fest, und es sei $a_0 \in (0, 2/x)$.
Die Folge $(a_n)$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = a_n(2 - x a_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

a) Zeigen Sie:
   i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n \leq 1/x$.
   ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.
b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

H18:
a) Es sei $(a_n)$ eine Folge in $[0, \infty)$, und es sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist $((1 + a_n)^n/n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.
b) Untersuchen Sie die Folge $(\sqrt[n]{n^k})_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.