J. Müller WS 2005/2006

29.11.2005

5. Übung zur Analysis I

Gruppenübungen

G10: Für ein $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{K}$ sei

$$U_\varepsilon(a) := \{b \in \mathbb{K} : |b - a| < \varepsilon\}\,.$$

Versuchen Sie, sich ein Bild von der Geometrie von $U_\varepsilon(a)$ zu machen.

G11: (Einschließungskriterium)
Es seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie:

a) Sind (a_n) und (c_n) konvergent mit $\lim a_n = \lim c_n = a$, so ist auch (b_n) konvergent mit $\lim b_n = a$.

b) Gilt $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, so gilt auch $c_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

c) Gilt $b_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$, so gilt auch $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$.

G12: Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert:

$$\text{(i)}\ \ a_n = \frac{5n^3 - 1}{n^2 + n}\,, \qquad \text{(ii)}\ \ b_n = \frac{2^n}{4^n - 1}\,, \qquad \text{(iii)}\ \ c_n = \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^n\,.$$

Hausübungen

H13: Zeigen Sie: Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.

H14: Zeigen Sie: Für alle $q > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\dfrac{q^n}{n^k} \to \infty$.

H15: a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert:

$$\text{(i)}\ \ a_n = \frac{n^{10}\sqrt{n}}{2^n}\,, \qquad \text{(ii)}\ \ b_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{3n}\,, \qquad \text{(iii)}\ \ c_n = (-1)^n\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n^2}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge $\Big((1 + \frac{1}{n})^{n+1}\Big)_n$ streng monoton fallend ist.