J. Müller

WS 2005/2006

22.11.2005

# 4. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 28.11.2005, vor der Vorlesung

## Gruppenübungen

G7: Es sei $K$ ein geordneter Körper, und es seien $x, y \in K$. Zeigen Sie:

(i) $4xy \leq (x+y)^2$,

(ii) Ist $K = \mathbb{R}$ und sind $x, y \geq 0$, so gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$ und $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

G8: a) Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \binom{m+\nu-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}.$$

b) Was ist $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^2$ ?

G9: Es seien $z_1 = (1, 1/3)$ und $z_2 = 2 - i$. Geben Sie $\overline{z}_1$, $z_1 z_2$, $z_1 \overline{z}_1$ und $z_2/z_1$ in Normaldarstellung an, und skizzieren Sie die entsprechenden Punkte in der Gaußschen Zahlenebene.

## Hausübungen

H10: Es sei

$$M := \left\{ \frac{n \cdot m}{(n+m)^2} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}\,.$$

Untersuchen Sie, ob $\sup M$ bzw. $\inf M$ existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls. Existieren auch $\max M$ bzw. $\min M$?

H11: a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2n^n \leq (n+1)^n$.

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ ?

H12: Es sei $K$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie

(i) Sind $a, b \in K$ mit $a + b \geq 0$, so ist $a^3 + b^3 - a^2 b - a b^2 \geq 0\,.$

(ii) Ist $K = \mathbb{R}$ und sind $x, y > 0$, so gilt $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ .