J. Müller

WS 2005/2006
15.11.2005

3. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 21.11.2005, vor der Übung

Gruppenübungen

G4: Es sei K ein Körper, und es seien $x \in K, n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) $nx + mx = (n+m)x$.

(ii) Ist K geordnet und $x > 0_K$ sowie $n > m$, so ist

$$nx > mx > 0_K \,.$$

G5: Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $x \in K, x \geq 0_K$. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(1_K + x)^n \geq 1_K + nx + \frac{n(n-1)}{2}\, x^2 \,.$$

G6: a) Zeigen Sie: Ist K ein Körper und sind $a, b \in K$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b^n - a^n = (b-a)\sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu} \,.$$

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 5 Teiler von $8^n - 3^n$.

Hausübungen

H7: Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^3 < 2^n$?

H8: Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $x \in K$ mit $-1_k \leq x \leq 0_K$. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(1_K + x)^n \leq 1_K + nx + \frac{n(n-1)}{2}\, x^2 \,.$$

H9: (Irrationalität des Goldenen Schnitts)
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 = 1 - x$$

keine Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass die Gleichung $x^2 = 5$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.