J. Müller WS 2005/2006

07.02.2006

13. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 20.02.2006, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G34: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Beweisen Sie:

(i) $(M^0)^c = \overline{M^c}$,

(ii) ∂M ist abgeschlossen.

G35: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $f : X \to \mathbb{K}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$M := \{x \in X : f(x) = 0\} \quad (= f^{-1}(\{0\}))$$

abgeschlossen ist. Geben Sie jeweils eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an mit $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ bzw. $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$.

G36: Zeigen Sie:

(i) Für alle $x_1, x_2 > 0$ ist $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

(ii) Für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$.

Hausübungen

H37: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist

(i) $\{x \in M : f(x) \leq y\}$ abgeschlossen,

(ii) $\{x \in M : f(x) < y\}$ offen.

H38: Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie, dass sinh streng monoton wachsend ist mit $W(\sinh) = \mathbb{R}$ und bestimmen Sie $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

H39: a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt diskret, falls ein $\delta > 0$ existiert mit $d(x, y) \geq \delta$ für alle $x, y \in M$, $x \neq y$. Zeigen Sie, dass jede diskrete Menge abgeschlossen ist.

b) Es sei $(V, \|\cdot\|) = (B([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, und es sei

$$M := \{\chi_{\{a\}} : a \in [0,1]\}$$

(vgl. H.5). Zeigen Sie: M ist abgeschlossen und beschränkt in $(V, d_{\|\cdot\|})$, aber nicht kompakt.