J. Müller

WS 2005/2006
31.01.2006

12. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 06.02.2006, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G31: Zeigen Sie: Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind 2π-periodisch, d.h. es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \text{und} \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,.$$

G32: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

a) Zeigen Sie: Existieren $x_2, x_2 \in I$ mit $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, so existiert ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = 0$.

b) Gilt a) auch stets mit $\mathbb{Q} \cap I$ anstelle von I ?

G33: Zeigen Sie, dass $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist.

Hausübungen

H34: Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left| e^z - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \right| \le \frac{|z|^n}{(n+1)!} \left(e^{|z|} - 1\right).$$

H35:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

eine Unstetigkeitsstelle 2. Art an $x_0 = 0$ hat.

b) Untersuchen Sie die Funkton $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x \cdot f(x)$, auf Stetigkeit.

H36: Zeigen Sie: Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$e^x + x = 0\,.$$