J. Müller

WS 2005/2006
17.01.2006

10. Übung zur Analysis I
Abgabe: Montag, 23.01.2006, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G25: Zeigen Sie, dass durch

$$||x||_\infty := \max_{j=1,\dots,m} |x_j| \qquad (x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m)$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^m$ definiert ist.

G26: Bestimmen Sie die Häufungspunkte folgender Mengen $M \subset \mathbb{R}$

$$\text{(i)} \quad M = \mathbb{Z}, \qquad \text{(ii)} \quad M = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}, \qquad \text{(iii)} \quad M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,.$$

G27: Es sei $A \subset [0, \infty)$ beschränkt und nichtleer, und es sei $\alpha \geq 0$. Beweisen Sie:

$$\alpha \cdot \sup A = \sup\{\alpha x : x \in A\}\,.$$

Hausübungen

H28: Zeigen Sie, dass durch

$$d(x, y) := \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert ist.

H29: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es seien $M \subset X, x \in X$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) x ist ein Häufungspunkt von M.
b) Es existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ und $x_n \neq x$ $(n \in \mathbb{N})$.
c) Es existiert eine Folge (y_n) in M mit $y_n \to x$ $(n \to \infty)$ und $y_n \neq y_m$ für $n \neq m$.
d) Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\{y \in M : 0 < d(x, y) < \varepsilon\}$ unendlich.

H30: Es sei $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Zeigen Sie, dass durch

$$||f||_\infty := \sup\{|f(t)|_E : t \in M\} \qquad (f \in B(M, E))$$

eine Norm auf $B(M, E) := \{f : M \to E : f \text{ beschränkt}\}$ gegeben ist.