J. Müller

SS 2004

29.06.2004

9. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis II

Gruppenübungen

G19: Beweisen Sie: Auf den jeweiligen Definitionsbereichen gilt:

$$\text{(i)} \quad \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2, \qquad \text{(ii)} \quad \cot' = -\frac{1}{\sin^2} = -1 - \cot^2 .$$

G20: Es sei I ein Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar auf I^0. Ferner existiere ein $\alpha < 1$ mit $|f'(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in I^0$. Zeigen Sie: f ist eine α-Kontraktion, d.h. es gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in I.$$

G21: Richtig oder falsch?
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I. Dann gilt: Ist x_0 eine Extremstelle von f, so ist $f'(x_0) = 0$.

Hausübungen

H23: Beweisen Sie: Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{(i)} \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \text{(ii)} \quad \operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2} .$$

H24: (Newton-Verfahren)
Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar auf (a, b), d.h. f' und f'' existieren auf (a, b) und f'' ist stetig auf (a, b). Ferner sei $x^* \in (a, b)$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Zeigen Sie: Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x_0 \in (a, b)$ mit $|x_0 - x^*| < \delta$ die Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gegen x^* konvergiert.