J. Müller

SS 2004
12.05.2004

3. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis II

Gruppenübungen

G6: Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen in $\mathbb{R}$ kompakt sind:

$$\text{(i)} \quad M = [0,1)\,, \qquad \text{(ii)} \quad M = \mathbb{N}\,, \qquad \text{(iii)} \quad \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\,.$$

G7: Überlegen Sie sich, dass jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist.

G8: Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und es seien $x \in E$ sowie $r > 0$. Zeigen Sie:

(i) $U_r(x)$ ist offen,

(ii) $U_r[x] := \{y \in E : \| y - x \| \leq r\}$ ist abgeschlossen.

Hausübungen

H7: Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und es sei $M \subset E$. Wir setzen

$$M^0 := \bigcup_{O \subset M \text{ offen}} O \qquad \text{(Inneres von } M)\,,$$

$$\overline{M} := \bigcap_{A \supset M \text{ abgeschlossen}} A \qquad \text{(Abschluss von } M)\,,$$

$$\partial M := \overline{M} \setminus M^0 \qquad \text{(Rand von } M)\,.$$

Zeigen Sie: M^0 ist offen und $\overline{M}$ sowie ∂M sind abgeschlossen.

H8: Bestimmen Sie $\overline{M}$, M^0 und ∂M für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\text{(i)} \quad \mathrm{M} = [0,1)\,, \qquad \text{(ii)} \quad \mathrm{M} = \mathbb{Q}\,.$$

H9: Es sei $(E, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ (vgl. H5). Zeigen Sie: Die Menge

$$B = \{x \in \ell_1 : \| x \|_1 \leq 1\}$$

ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.