

10. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis II**Gruppenübungen**

G22: Zeigen Sie: Für alle $c \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$e^x + x = c$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

G23: Untersuchen Sie das Monotonieverhalten folgender Funktionen und bestimmen Sie deren Extremstellen:

(i) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x},$

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x.$

G24: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x},$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{1 - \cos x}.$

Hausübungen

H25: Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $e^x + x = 0$ (vgl. G22) näherungsweise durch Anwendung des Newton-Verfahrens.

H26: a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und bestimmen Sie die Extremstellen von $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^x.$

b) Zeigen Sie, dass $g := \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ existiert und bestimmen Sie die Extremstellen von $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \begin{cases} x^x & , x > 0 \\ g & , x = 0 \end{cases}.$$

H27: Bestimmen Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax)}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x}.$$