J. Müller SS 2004
28.04.2004

1. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis II

Gruppenübungen

G1: Es sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to z\,(n \to \infty)$. Zeigen Sie:
Dann gilt auch

$$\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)\,, \quad \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)\,, \quad \overline{z_n} \to \overline{z} \qquad (n \to \infty)\,.$$

G2: Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklungen für sin und für cos mit Entwicklungsmitte 0.

Hausübungen

H1: a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$0 \,<\, e - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \,\leq\, \frac{e}{(n+1)!}\,.$$

b) Berechnen Sie ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{1}{e}\left(e - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\right) \leq 10^{-16}$$

gilt.

H2: Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(e^z)^n = e^{nz}\,.$$

H3: (de Moivre-Formeln) Es seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$,

b) $$\cos(nx) \;=\; \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu/2} \sin^{\nu}(x) \cos^{n-\nu}(x),$$

$$\sin(nx) \;=\; \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^{(\nu-1)/2} \sin^{\nu}(x) \cos^{n-\nu}(x).$$