

## Vorlesung

### Stochastische Prozesse II

#### I Stochastische Analysis

##### 1 Stoppzeiten, Martingale, Lokalisierung

Erste Eintrittszeiten, progressive Prozesse, optimal sampling, erste Durchgangszeiten der BM, inverse Gaußverteilung, lokalisierende Folgen von Stoppzeiten, lokale Martingale, lokal beschränkte Prozesse, Doobsche Maximalungleichungen, Räume stetiger Martingale  $\mathcal{M}, \mathcal{M}^2, \mathcal{H}^2$ , Martingalkonvergenz.

##### 2 $\sigma$ -Algebren über $\mathbb{R}_+ \times \Omega$

$\sigma$ -Algebra der vorhersehbaren Mengen  $\mathcal{P}$ ,  $\sigma$ -Algebra der progressiv-messbaren Mengen Prog,  $\sigma$ -Algebra der adaptierten, (bi-) messbaren Mengen  $\mathcal{V}$ , vorhersehbare Prozesse, progressive Prozesse, stochastische Intervalle.

##### 3 Stochastische Integration (bzgl. der BM)

Elementare Prozesse, Räume  $\mathcal{L}^2(W), \mathcal{L}(W), \mathcal{L}_{lok}^2(W)$ , Ito-Integral  $\int H dW$ , Integralprozeß  $H \cdot W$ , Martingaleigenschaft, unkorrelierte Zuwächse, gestoppte Integralprozesse, Lokalisierung 2. Art, lokale Martingaleigenschaft, Lengart-Ungleichung.

##### 4 Ito-Prozesse, quadratische Variation, Ito-Formel

Stetige Semimartingale, Ito-Prozesse, stochastisches Differential, Integralprozeß  $U \cdot X$ , Approximation durch spezielle Riemann-Stieltjes Summen, quadratische Variation, quadratische Kovariation, partielle stochastische Integration, Ito-Formel ("Hauptsatz der stochastischen Analysis"), Martingale PDGL-Bedingung, geometrische BM, stochastische DGL für BS-Modell, Doléans-Exponential, Novikov-Bedingung, Lévy-Charakterisierung Brownscher Bewegungen, Gauß-Martingale,  $k$ -dimensionale Brownsche Bewegung ( $BM^k$ ), mehrdimensionale Ito-Formel, harmonische Funktionen.

##### 5 Darstellungseigenschaft der BM, Satz von Girsanov

Darstellung von ZV als Ito-Integrale, Darstellung von Martingalen als Ito-Prozesse, Maßwechsel, Girsanov-Transformation.

##### 6 Stochastische Differentialgleichungen

Lipschitz- und Wachstumsbedingungen für Koeffizienten einer stochastischen DGL  $GL(\mu, \sigma)$ , Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, lineare stochastische DGLn, Vasicek-Modell, Ornstein-Uhlenbeck Prozess, charakteristischer Operator, Dynkin-Operator, Martingale PDGL-Bedingung, Dynkin-Formel, Markoveigenschaft der Lösung von  $GL(\mu, \sigma)$  im homogenen Fall, Markov-Halbgruppe.

## II Black-Scholes Modell

### 7 Hedgen im BS-Modell

Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes, selbstfinanzierende Handelstrategien  $SF$ ,  $SF_1$ , und  $SF_2$ , Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Preisformel, Hedge-Strategien für pfadunabhängige Claims,  $BS$ -Randwertproblem, Feynman-Kac Darstellung.

### 8 Exotische (pfadabhängige) Optionen

Spiegelungsprinzip für BM, Preisformel für Down-and-Out Call, (deterministisches) Randwertproblem für Down-and-Out Call, Randwertproblem für asiatische Optionen.