

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen

Abgabetermin: 18.6.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 29 (Analysis via Stochastik/4 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty f(y) \frac{n^n y^{n-1} \exp(-ny/x)}{(n-1)! x^n} dy \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$$

für jede stetige, beschränkte Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $x \in (0, \infty)$.

Hinweis: Starkes Gesetz der großen Zahlen für $E(x)$ -verteilte ZV'n.

Aufgabe 30 (SLLN von Kolmogorov/4 Punkte)

Sind die $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid und ist X_1 P -quasiintegrierbar (also $EX_1^+ < \infty$ oder $EX_1^- < \infty$), so folgt

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow EX_1 \text{ } P\text{-f.s.}$$

Dies ist eine Erweiterung des SLLN 6.8.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Es seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ reelle iid ZV'n mit $P^{X_1} = U(0, 1)$, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Borel-messbar,

$$Z_n = \begin{cases} 1, & f(X_n) > Y_n \\ 0, & f(X_n) \leq Y_n. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^n Z_i/n \rightarrow \int_{[0,1]} f d\lambda \text{ } P\text{-f.s.}$$

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$S(f) := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ stetig in } x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

für jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.