C. Tasto
H. Luschgy

SS 2013
Blatt 7

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen

Abgabetermin: 11.6.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 25 (Stochastische Konvergenz und Median/4 Punkte)
Seien $a_n \neq 0, b_n \in \mathbb{R}, m_n \in \text{Med}(X_n), n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $\text{Med}(X)$ für eine reelle ZV X die Menge der Mediane von X, also $\text{Med}(X) = \{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}, P(X \geq x) \geq \frac{1}{2}\}$ (s. Exkurs über Quantile). Zeigen Sie:

a) $X_n/a_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow m_n/a_n \to 0$.
b) $X_n - b_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow m_n - b_n \to 0, X_n - m_n \xrightarrow{P} 0$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}^2} X_0, Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}^2} Y_0 \ \Rightarrow \ VarX_n \to VarX_0, \ \text{Kov}(X_n, Y_n) \to \ \text{Kov}(X_0, Y_0).$$

Aufgabe 27 (Gleichgradige Integrierbarkeit/2+4 Punkte)
a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle ZV mit

$$P(X_n = a_n) = \frac{1}{n} \text{ und } P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, a_n > 0.$$

Ist $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar, falls
i) $\frac{a_n}{n} \to 0$, ii) $a_n = cn, c > 0$ gilt?

b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle iid ZV mit $E|X_1|^p < \infty, 1 \leq p < \infty$, und $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen sie, dass $\{|\frac{S_n}{n}|^p : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist.

Hinweis zu b): Man weise die Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 5.11 nach. Hierzu zerlege man X_n in der Form

$$X_n = X_n \cdot 1_{\{|X_n|>a\}} + X_n \cdot 1_{\{|X_n|\leq a\}}.$$

Aufgabe 28 (3+4 Punkte)
Zeigen Sie: Sind die $X_n, n \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängig in $\mathcal{L}^2$, so gilt:

a) SLLN gilt für $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{VarX_n}{n^2} < \infty$ (Kolmogorov-Bedingung)

Hinweis: Wählen Sie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$P(X_n = \pm n^2) = 1/n^2, P(X_n = 0) = 1 - 2/n^2, n \geq 2.$$

b) $\sum_{i=1}^{n} VarX_i/n^2 \ \to 0$ (Markov-Bedingung) $\not\Longrightarrow$ SLLN gilt für $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar $\not\Longrightarrow$ SLLN.

Hinweis: Wählen Sie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n\ log(n+1)}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ log(n+1)}, n \in \mathbb{N},$$

und überlegen Sie sich mittels des Integralvergleichskriteriums aus der Analysis, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ log(n+1)} = \infty.$$