C. Tasto
H. Luschgy

SS 2013
Blatt 6

**Wahrscheinlichkeitstheorie**

**Übungen**

Abgabetermin: 4.6.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 21 (Terminale $\sigma$-Algebra/2 + 4 + 2 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle ZV'n, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0, \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, und $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

a) $\liminf_{n\to\infty} X_n$ und $\liminf_{n\to\infty} (S_n - b_n)/a_n$ sind $(X_n)$-terminale ZV'n.

b) $\{\lim_{n\to\infty} X_n = a\}, \{\lim_{n\to\infty} (S_n - b_n)/a_n$ existiert$\}$,
$\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ ist konvergent$\}$, $\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in B_n\}$ $(B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
sind $(X_n)$-terminale Ereignisse.

c) $\{\lim_{n\to\infty} S_n = a\}$ ist i.A. nicht $(X_n)$-terminal.

Aufgabe 22 (4 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle iid ZV'n und $0 < p < \infty$. Zeigen Sie:
$E|X_1|^p < \infty \;\Leftrightarrow\; |X_n|/n^{1/p} \to 0$ P-f.s.

$E|X_1|^p = \infty \;\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} |X_n|/n^{1/p} = \infty$ P-f.s.

Hinweis: Man verwende das Borel-Cantelli-Lemma und Exkurs A.6 (MIT).

Aufgabe 23 (Metrisierbarkeit der stochastischen Konvergenz/ 4 Punkte)
Sei $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Menge der reellen Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $d(X,Y) := E|X-Y| \wedge 1$ für $X, Y \in \mathcal{L}_0$. Zeigen Sie: $d$ ist eine Halbmetrik auf (dem Vektorraum) $\mathcal{L}_0$, und für $X_n, X \in \mathcal{L}_0$ gilt $X_n \xrightarrow{P} X$ genau dann, wenn $d(X_n, X) \to 0, n \to \infty$.

Aufgabe 24 (6Bp + 2 + 2 + 2 Punkte)
Wie jedes Jahr im Frühling, stehen Fahrradtouren hoch im Kurs. Erfahrungsgemäß empfiehlt es sich bei längeren Touren, einen Ersatzschlauch mitzunehmen, um nicht beim ersten Platten gleich die Tour abbrechen zu müssen.
Berechnen Sie unter der Annahme, daß die Lebensdauern $X_i, i \in \{1,2,3\}$, der drei Schläuche unabhängig voneinander exponentialverteilt mit Parameter $a > 0$ sind, folgende Größen:

a) Die Verteilungsfunktion der ,,Lebensdauer" L des Fahrrades, d.h. des Zeitpunktes, zu dem eine zweite Reparatur fällig wird. Zeigen Sie, daß L eine Erlangverteilung $\Gamma(\frac{a}{2}, 2)$ besitzt.

b) $EL, \mathrm{Var}\, L$.

c) $P(L \geq EL)$.

d) Vergleichen Sie die unter a) - c) berechneten Größen mit denen, die sich für ein ,,Einrad", d.h. $L = X_1$, ergeben.

Hinweis zu a): Überlegen Sie sich, dass für die Lebensdauer L des Fahrrades gilt:

$$L = \min(\max(X_1, X_2),\ \min(X_1, X_2) + X_3)$$

Die Punkte zu Aufgabe 24 a) sind Bonuspunkte