C. Tasto
H. Luschgy

SS 2013
Blatt 5

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen

Abgabetermin: 28.5.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige $E(a)$-verteilte Zufallsvariable.
Sei $Y_1 := X_1 + X_2, Y_2 := \frac{X_1}{X_2}$.

a) Berechnen Sie die λ^2-Dichte der Verteilung von (Y_1, Y_2) und die λ-Dichte der Verteilung von Y_2.

b) Zeigen Sie, daß Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig sind.

Hinweis zu a): Transformationsformel für λ^2-Dichten (Exkurs A.8, MIT)

Aufgabe 18 (Korrelation vs Unabhängigkeit/2 + 2 Punkte)
Seien X eine reellwertige ZV mit P^X = Laplace-Vert. auf $\{0, \pi/2, \pi\}$, d.h. $P(X = 0) = P(X = \frac{\pi}{2}) = P(X = \pi) = \frac{1}{3}$, sowie $Y := \sin X$ und $Z := \cos X$. Zeigen Sie:

a) Y, Z sind unkorreliert.

b) Y, Z sind nicht stochastisch unabhängig.

Aufgabe 19 (Wartezeiten/1 + 2 + 3 + 6Bp + 2 Punkte)
Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein meßbarer Raum, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid-Folge $\mathcal{X}$-wertiger ZV'n auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P), B \in \mathcal{B}$ mit $0 < P(X_1 \in B) =: p < 1, r \in \mathbb{N}$, sowie

$$T_r := \inf\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} 1_B(X_i) = r\}, T_0 := 0$$

(r-te Eintrittszeit der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B).
Zeigen Sie:

a) T_r ist eine $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$-wertige ZV.

b) $P(T_r = k) = \begin{cases} 0, & k < r, \\ \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, & k \geq r, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

c) $T_r < \infty$ P-f.s.
(Die Verteilung von T_r heißt *negative Binomialverteilung* mit Parametern r und p).

d) $(W_r)_{r\in\mathbb{N}} := (T_r - T_{r-1})_{r\in\mathbb{N}}$ ist eine iid Folge von $G(p)$-verteilten ZV'n, und es gilt:

$$P^{T_r} = *_{i=1}^{r} P^{T_1} = *_{i=1}^{r} G(p).$$

(W_r bezeichnet die Wartezeit zwischen dem $(r-1)$-ten und dem r-ten Eintritt der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B).

e) Berechnen Sie ET_r und $VarT_r$.

Hinweis: Binomische Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ für $|x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$.

Die Punkte zu Aufgabe 12 d) sind Bonuspunkte.

Aufgabe 20 (Normalverteilung/4 Punkte)
Sei T eine reelle $m \times d$ Matrix und T wird mit einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ identifiziert. Zeigen Sie:

$$N_d(a, \Sigma)^T = N_m(T(a), T\Sigma T^t).$$