C. Tasto
H. Luschgy

SS 2013
Blatt 4

**Wahrscheinlichkeitstheorie**

**Übungen**

Abgabetermin: 14.5.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_{n+1}$ ZV auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (mit Werten in bel. meßbaren Räumen). Zeigen Sie, dass $X_1, \ldots, X_{n+1}$ genau dann stochastisch unabhängig sind, falls $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig sind und $X_{n+1}$ von $\sigma(X_1, \ldots X_n)$ stochastisch unabhängig ist.

Aufgabe 14 (Minima und Maxima/ 3+1+1 Punkte)
$X_1, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängige reelle ZV auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A, P)$ und Min:= $\min_{1\leq i\leq n} X_i$ sowie Max:= $\max_{1\leq i\leq n} X_i$. Zeigen Sie für $x, y \in I\!R$:

a) $P(\text{Min} \leq x, \text{Max} \leq y) = \Pi_{i=1}^n P(X_i \leq y) - \Pi_{i=1}^n P(x < X_i \leq y)$.

b) $P(\text{Min} \leq x) = 1 - \Pi_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq x))$.

c) $P(\text{Max} \leq y) = \Pi_{i=1}^n P(X_i \leq y)$.

Aufgabe 15 (Minima/ 2+2 Punkte)
Bestimmen Sie in der Situation von Aufgabe 14 die Verteilung von Min, falls die $X_i$

a) $E(a_i)$-verteilt , $a_i > 0$,

b) $Pa(a, b_i))$-verteilt mit Parametern $a, b_i > 0$,

$i \in \{1, \ldots, n\}$, sind.

Aufgabe 16 (4 Bonuspunkte +4)
a) Zeigen sie $N(a, \sigma^2) \star N(b, \tau^2) = N(a + b, \sigma^2 + \tau^2)$.
b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige, identisch $N(a, \sigma^2)$-verteilte ZV'n. Berechnen Sie die Verteilung von

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - EX_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{nVX_1}}\,(\sum_{i=1}^n X_i - nEX_1).$$