T. Dinev
H. Luschgy

SS 2013
Blatt 11

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen

Abgabetermin: 9.7.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 41 (3 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle, stochastisch unabhängige ZV. Zeigen Sie:

Für $P^{X_n} = N(0, \frac{1}{n^2})$ gilt CLT.

Aufgabe 42 (2+2 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle iid ZV'n mit $X_1 \in \mathcal{L}^2, EX_1 = 0, VarX_1 = 1$. Zeigen Sie:

a) $\sqrt{n}\,\dfrac{S_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \stackrel{d}{\to} N(0,1)$.

b) $\dfrac{S_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \stackrel{d}{\to} N(0,1)$.

Aufgabe 43 (4 Punkte)
Eine faire Münze wird n-mal geworfen, $K_n :=$ Anzahl von ,,Kopf", $W_n :=$ Anzahl von ,,Wappen". Berechnen Sie

a) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|K_n - W_n| \leq x\sqrt{n}),\ x \geq 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|K_n - W_n| \leq xn),\ x \geq 0.$

Aufgabe 44 (5 Bonuspunkte)
Es sei $\mathcal{P} = \{Q \in M^1(\mathbb{R}) : \int x dQ(x) = 0, \int x^2 dQ(x) = 1\}$ und

$$T(Q)(A) := \int 1_A(\frac{x+y}{\sqrt{2}}) dQ \otimes Q(x,y).$$

Sei ferner $T^0(Q) := Q, T^n(Q) := T(T^{n-1}(Q)), n \in \mathbb{N}, Q \in \mathcal{P}$.

Zeigen sie, dass

$$T^n(Q) \to N(0,1), n \to \infty$$

für alle $Q \in \mathcal{P}$ gilt und $Q = N(0,1)$ der einzige Fixpunkte von T in $\mathcal{P}$ ist.