

## Stochastische Prozesse I Übungen

**Besprechungstermin: 9.01.14, 14.30 Uhr**

Aufgabe 32 (Poisson-Prozess)

Für die Untersuchung des Poisson-Prozesses sind folgende Formeln zu bestätigen (s. Beispiel 7.3).

a) Für  $A_n(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a < x_1 < \dots < x_n < b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lambda^n(A_n(a, b)) = \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

b)  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  seien iid  $E(1/c)$ -verteilt,  $c > 0$ ,  $S_j := \sum_{i=1}^j Z_i$ . Für die  $\lambda^n$ -Dichte  $f$  der Verteilung von  $(Z_1, \dots, Z_n)$  gilt also

$$f(z) = c^n \exp(-c \sum_{i=1}^n z_i) 1_{(0, \infty)^n}(z).$$

Dann ist  $g$  mit

$$g(y) := c^n \exp(-cy_n) 1_{\{y \in \mathbb{R}^n : 0 < y_1 < \dots < y_n\}}(y)$$

$\lambda^n$ -Dichte der Verteilung von  $(S_1, \dots, S_n)$ .

Aufgabe 33. (Poisson-Prozess)

$X = (X_t)_{t \geq 0}$  sei ein Poisson-Prozess mit Intensität  $c > 0$ . Zeigen Sie:

a)

$$\begin{aligned} P(X_t = 0) &= 1 - ct + o(t), \\ P(X_t = 1) &= ct + o(t), \\ P(X_t \geq 2) &= o(t) \text{ für } t \rightarrow 0, t > 0, \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{P(X_t=1)}{P(X_t \geq 1)} &= 1. \end{aligned}$$

b) (SLLN)

$$\frac{X_t}{t} \rightarrow EX_1 \text{ f.s., } t \rightarrow \infty, EX_1 = c.$$

(Dies gilt übrigens für jeden (reellen) f.s. cadlag Lévy-Prozess  $X$  mit  $E|X_1| < \infty$ .)

Aufgabe 34. (BM, Brownsche Brücke)

$W = (W_t)_{t \geq 0}$  sei eine BM. Zeigen Sie:

a)  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  mit  $X_t := W_{s+t} - W_s$  für ein  $s \geq 0$  ist eine BM.

b)  $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$  mit  $X_t := W_t - tW_1$  ist ein f.s. stetiger, zentrierter Gauß-Prozess mit  $X_0 = X_1 = 0$  f.s. und Kovarianzfunktion  $\Gamma_X(s, t) = \min\{s, t\} - st$ . ( $X$  heißt Brownsche Brücke auf  $[0,1]$ .)

Aufgabe 35. (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)

Ein reeller, f.s. stetiger, zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\Gamma(s, t) = \beta e^{-\alpha|s-t|}, s, t \geq 0$$

heißt (stationärer) Ornstein-Uhlenbeck (OU)-Prozess mit Parametern  $\alpha, \beta > 0$ . Zeigen Sie:  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit

$$X_t := e^{-\alpha t} W_{\beta \exp(2\alpha t)}$$

ist ein OU-Prozess. Dabei ist  $W$  eine BM.