H. Luschgy WS 2013/14

Blatt 7

Stochastische Prozesse I
Übungen

Besprechungstermin:

Aufgabe 25. (Konvexität von $\mathbb{P}$)
Beweisen Sie bitte Satz 4.7 der Vorlesung: $\mathbb{P}$ ist konvex

Aufgabe 26. (Arbitrage)
Zeigen Sie: Falls im N-Perioden Marktmodell eine Arbitragestrategie existiert, dann gibt es auch eine Arbitragestrategie K mit der Eigenschaft $V_n(K) \geq 0 \; \forall n \in I = \{0, \dots, N\}$.

Hinweis: Falls $P(V_j(H) < 0) > 0$ für eine Arbitragestrategie H, definiere

$$n := \max\{0 \leq j \leq N-1 : \; P(V_j(H) < 0) > 0\},$$

$$U_j := \begin{cases} 0, \; 0 \leq j \leq n & , \\ H_j 1_{\{V_n(H)<0\}} & , \quad n+1 \leq j \leq N \end{cases}$$

und dann K via Lemma 4.9.

Aufgabe 27. Gegeben sei ein Kapitalmarkt, auf dem zu den Zeitpunkten $n \in I = \{0,1\}$ eine risikolose Anleihe und 2 Aktien gehandelt werden. Die Preise $S_n^0(w)$ der Anleihe und $S_n^i(w)$ der Aktien $i \in \{1,2\}$ zum Zeitpunkt n im Zustand $w \in \Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$ sind in folgender Tabelle zusammengefasst, wobei $S_0^i = S_0^i(w) \; \forall w \in \Omega$.

i	S_0^i	$S_1^i(w_1)$	$S_1^i(w_2)$	$S_1^i(w_3)$
0	1	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{9}$
1	5	$\frac{60}{9}$	$\frac{60}{9}$	$\frac{40}{9}$
2	10	$\frac{40}{3}$	$\frac{80}{9}$	$\frac{80}{9}$

Ferner seien $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \; \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{w\}) > 0 \; \forall w \in \Omega$. Setze

$$\begin{aligned} W \;\; := \;\; & \{x \in \mathbb{R}^3 : \exists h \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } S_0 h \text{ (Skalarprodukt) } = 0 \\ & \text{und } S_1(w_k)h = x_k \; \forall k \in \{1,2,3\}\} \end{aligned}$$

und

$$A := \{x \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ komponentenweise}, \; x \neq 0\}.$$

a) Zeigen Sie: Der Kapitalmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn $W \cap A = \emptyset$.

b) Ist der Markt im vorliegenden Fall arbitragefrei oder finden Sie eine Arbitrage-Strategie? (Die Strategie können Sie mit Hilfe von a) berechnen.)

Aufgabe 28. (Bewertungsschranken für Call und Put)
Die Call-bzw. Put-Option $C = (S_N^k - K)^+$ bzw. $D = (K - S_N^k)^+$ seien absicherbar $(k \geq 1)$ in einem N-Perioden-Marktmodell mit Risikoneutralität und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
Bestätigen Sie die Bewertungsgrenzen:

$$S_0^k - \frac{K}{\beta_0} E_Q \beta_N \leq \Pi(C) \leq S_0^k$$

$$\frac{K}{\beta_0} E_Q \beta_N - S_0^k \leq \Pi(D) \leq \frac{K}{\beta_0} E_Q \beta_N, Q \in \mathbb{P}.$$

Aufgabe 29. (CRR-Modell, 1 Aktie, 1 Bankguthaben)
$(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ seien iid ZV mit $P(Y_1 = u) = p = 1 - P(Y_1 = d), p \in (0,1), 0 < d < u$,

$$\begin{aligned} A_n &= A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i,\ A_0 > 0 \text{ Konstante,} \\ B_n &= B_0 (1+r)^n, B_0 > 0, r \geq 0 \text{ Konstanten.} \end{aligned}$$

Der Preisprozeß ist $S = (B, A)$ und der Informationsverlauf wird beschrieben durch

$\mathbb{F} = \mathbb{F}^A$ $(I = \{0, \ldots, N\})$. Konstruieren Sie im Fall $u \leq 1 + r$ und im Fall $1 + r \leq d$ jeweils eine Arbitragestrategie.

Aufgabe 30. Bestätigen Sie im arbitragefreien CRR-Modell die Rückwärtsrekursion

$$V(N, x) = f(x),$$

$$V(n, x) = \frac{1}{1+r}[qV(n+1, ux) + (1-q)V(n+1, dx)], 0 \leq n \leq N-1, x > 0,$$

für die Preisfunktion V eines pfadunabhängigen Claims $C = f(A_N)$. Bestätigen Sie ferner die Formel

$$H_n^1 = \frac{V(n, uA_{n-1}) - V(n, dA_{n-1})}{(u-d)A_{n-1}},$$

$$H_n^0 = \frac{(1+r)^{-n}}{B_0}(V(n, A_n) - H_n^1 A_n), 1 \leq n \leq N$$

für die Hedge-Strategie $H = (H^0, H^1)$ für $C = f(A_N)$ (s. 5.5 und 5.7 der Vorlesung).

Aufgabe 31. (Put Option)
Im CRR-Modell sei A_n der Preis von 100 USD in Schweizer Franken (SFR) zum Zeitpunkt n. Es sei $r = 0, A_0 = 150$ SFR,

$$A_1 = \begin{cases} 180 \text{ SFR} & \text{mit W.keit } \frac{1}{2} \\ \\ 90 \text{ SFR} & \text{mit W.keit } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Preis einer europäischen Put Option mit Strike-Preis 150 SFR und ein Hedge für $N = 1$ und $N = 2$.

Hinweis: Beispiel 5.6