H. Luschgy

WS 2013/14
Blatt 5

Stochastische Prozesse I
Übungen

Besprechungstermin: 05.12.13, 14.30 Uhr

Aufgabe 17. (Doob-Maximalungleichung für positive Supermartingale)
Sei $X = (X_n)_{n \geq 0}$ ein positives Supermartingal. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a > 0$:

$$P(\max_{0 \leq j \leq n} X_j > a) \leq \frac{1}{a} E X_0.$$

Hinweis: Beweis von Satz 2.12 a).

Aufgabe 18
Zeigen Sie für das Martingal X aus Aufgabe 1:

$$X_n \to 0 \text{ f.s. für } n \to \infty.$$

Ist X gleichgradig integrierbar?

Aufgabe 19. (P. Lévy)
Seien $Z \in \mathcal{L}^1(P)$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

$$E(Z|\mathcal{F}_n) \to E(Z|\mathcal{F}_\infty) \text{ f.s. und in } \mathcal{L}^1$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 20.
Zeigen Sie, dass aus der $\mathcal{L}^1$-Konvergenz eines Martingals $X = (X_n)_{n \geq 0}$ für $n \to \infty$ die fast sichere Konvergenz folgt.