H. Luschgy

WS 2013/14
Blatt 4

Stochastische Prozesse I
Übungen

Besprechungstermin: 28.11.13, 14.30 Uhr

Aufgabe 13. (Supermartingaleigenschaft positiver lokaler zeitstetiger Martingale)
$X = (X_t)_{t \geq 0}$ sei ein positives lokales Martingal, $I = \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass X ein Supermartingal ist. (Im zeitdiskreten Fall $I = \mathbb{N}_0$ ist ein positives lokales Martingal nach Satz 2.10 schon ein Martingal.)

Hinweis: Lemma von Fatou für bedingte Erwartungswerte (s. Exkurs A.2)

Aufgabe 14. (Einfacher symmetrischer Random walk auf $\mathbb{Z}$, first passage time)
$(Z_n)_{n \geq 1}$ sei iid Folge mit $P(Z_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $X_n := \sum_{i=1}^{n} Z_i, Z_0 = X_0 := 0$ und $\mathbb{F} := \mathbb{F}^Z$. Für $z \in \mathbb{N}$ sei

$$\sigma := \inf\{n \geq 1 : X_n = z\}.$$

Zeigen Sie für die $\mathbb{F}$-Stoppzeit σ:

$$\begin{array}{ll} \sigma & < \infty \text{ f.s.}, \ E\sigma = \infty, \\ \sigma & \text{ist } \underline{\text{nicht}} \text{ regulär für das } \mathbb{F}\text{-Martingal } X. \end{array}$$

Hinweis: Beispiel 2.8. Man vergleiche σ mit

$$\tau_y := \inf\{n \geq 1 : X_n \in \{-y, z\}\}, y \in \mathbb{N}, y \to \infty.$$

Aufgabe 15. (Doob-Zerlegung für gestoppte $\mathscr{L}^1$-Folgen)
X sei eine $\mathbb{F}$-adaptierte $\mathscr{L}^1$-Folge mit Doob-Zerlegung $X = M + A$ und τ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit ($I = \mathbb{N}_0$ oder $I = \{0, \dots, N\}$). Zeigen Sie:

$$X^\tau = M^\tau + A^\tau$$

ist die Doob-Zerlegung von X^τ.

Aufgabe 16. (Die Klasse der lokalen $\mathbb{F}$-Martingale ist ein Vektorraum)
X und Y seien lokale $\mathbb{F}$-Martingale ($I = \{0, \dots, N\}$ oder $I = \mathbb{N}_0$), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\alpha X + \beta Y$ ein lokales $\mathbb{F}$-Martingal ist.