H. Luschgy WS 2013/14
Blatt 2

Stochastische Prozesse I
Übungen

Besprechungstermin: 14.11.13, 14.30 Uhr

Aufgabe 5. $(Z_n)_{n\geq 0}$ sei $\mathscr{L}^2$-Folge stochastisch unabhängiger ZV, $a_n = EZ_n, \sigma_n^2 =$ Var Z_n, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n)$, und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Es gilt also $\mathbb{F} = \mathbb{F}^Z$. Ferner sei

$$X_n := Z_0 + \sum_{j=1}^{n}(Z_j - a_j),$$

$$Y_n := Z_0^2 + \sum_{j=1}^{n}(Z_j - a_j)^2.$$

Zeigen Sie:

$$X^2 := (X_n^2)_{n\geq 0} \text{ ist } \mathbb{F} - \text{Submartingal}, \ (X_n^2 - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2)_{n\geq 0} \text{ ist } \mathbb{F} - \text{Martingal},$$

$$Y \text{ ist } \mathbb{F} - \text{Submartingal}, \ (Y_n - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2)_{n\geq 0} \text{ ist } \mathbb{F} - \text{Martingal}.$$

Aufgabe 6. (s. Satz 1.15 und Lemma 1.16)
$X = (X_n)_{n\geq 0}$ sei eine $\mathbb{F}$-adaptierte Folge und H $\mathbb{F}$-vorhersehbar. Zeigen Sie:

a) $X^2 = X_0^2 + 2(X_- \cdot X) + [X]$.

b) $\langle X \rangle$ ist der Kompensator von $[X]$, falls X $\mathscr{L}^2$-Folge ist.

c) $X^2 - [X]$ ist Martingal, falls X $\mathscr{L}^2$-Martingal ist.

d) $\langle H \cdot X \rangle = H^2 \cdot \langle X \rangle$, falls X und $H \cdot X$ $\mathscr{L}^2$-Folgen sind.

Aufgabe 7. (Symmetrischer random walk auf $\mathbb{Z}$, diskrete Tanaka-Formel)
$(Z_n)_{n\geq 1}$ sei iid Folge mit $P(Z_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$ und $X_n = X_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i, n \geq 0$, wobei X_0 eine $\mathbb{Z}$-wertige ZV mit $X_0 \in \mathscr{L}^1$, unabhängig von $(Z_n)_{n\geq 1}$, ist. Ferner sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Z_1, \cdots, Z_n)$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Berechnen Sie die Doob-Zerlegung von $|X| := (|X_n|)_{n\geq 0}$ bzgl. $\mathbb{F}$. (Resultat ist diskretes Analogon der Tanaka - Formel für die Brownsche Bewegung.)

Hinweis: Für den Kompensator A von $\mid X \mid$ gilt

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_{i-1}=0\}} = \text{ Anzahl der Nullen in } X_0, \ldots, X_{n-1}.$$

Aufgabe 8. (h-Eindeutigkeit in der Darstellungseigenschaft)
Für einen reellen adaptierten Prozess M sei $M = M_0 + H \cdot X = M_0 + K \cdot X$ mit einer $\mathscr{L}^2$-Folge X, H, K vorhersehbar,

$$H_n \triangle X_n,\ K_n \triangle X_n \in \mathscr{L}^2\ \forall n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

$$\triangle \langle X \rangle_n > 0\ \ \forall n \geq 1\ \Rightarrow\ H_n = K_n\ \ \forall n \geq 1$$