

Stochastische Prozesse I Übungen

Besprechungstermin: 30.1.14, 14.30 Uhr

Aufgabe 44. (Reflektierte BM)

$W = (W_t)_{t \geq 0}$ sei eine \mathbb{F} -BM. Zeigen Sie: $|W| := (|W_t|)_{t \geq 0}$ ist ein \mathbb{F} -Markov-Prozess mit Zustandsraum $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ und HG $(Q_t)_{t \geq 0}$, wobei $Q_t(x, \cdot) = \psi(t, x, \cdot) \lambda_{\mathbb{R}_+}$,

$$\psi(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) + \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right) \right], t > 0, x, y \geq 0.$$

Hinweis: $Q_t(x, \cdot) = N(x, t)(\cdot \cap \mathbb{R}_+) + N(-x, t)(\cdot \cap \mathbb{R}_+)$, $t > 0$ und Satz 9.6.

Aufgabe 45. (OU-Prozess)

- a) X sei ein \mathbb{F} -Markov-Prozess mit Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ und HG $(R_t)_{t \geq 0}$. Y sei ein \mathcal{X} -wertiger Prozess mit $X \stackrel{d}{=} Y$. Zeigen Sie: Y ist ein \mathbb{F}^Y -Markov-Prozess mit HG $(R_t)_{t \geq 0}$.
- b) $X = (X_t)_{t \geq 0}$ sei ein (stationärer) Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit Parametern $\alpha, \beta > 0$. (s. Aufgabe 35). Zeigen Sie: X ist \mathbb{F}^X -Markov mit HG $(Q_t)_{t \geq 0}$,

$$Q_t(x, \cdot) := N(e^{-\alpha t}x, \beta(1 - e^{-2\alpha t})).$$

Aufgabe 46. (Zeitumkehr)

X sei ein \mathcal{X} -wertiger \mathbb{F} -Markov-Prozess mit Markov-Halbgruppe $(R_t)_{t \geq 0}$, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $f \in \bigcap_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ s \leq t}} \mathcal{L}^1(R_s(x, \cdot))$ und $R_{t-s}f(X_s) \in \mathcal{L}^1(P) \forall s \leq t$ (z.B. f beschränkt). Zeigen Sie:

$$(R_{t-s}f(X_s))_{0 \leq s \leq t} \text{ ist ein } (\mathcal{F}_s)_{s \leq t} \text{ - Martingal.}$$

Aufgabe 47. (Geometrischer Lévy-Prozess)

$X = (X_t)_{t \geq 0}$ sei ein reeller \mathbb{F} -Lévy-Prozess und

$$Y_t := Y_0 \exp(X_t), t \geq 0,$$

mit einer Konstanten $Y_0 > 0$. Zeigen Sie, dass $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ ein \mathbb{F} -Markov-Prozess mit Zustandsraum $\mathcal{Y} = (0, \infty)$ ist und beschreiben Sie die HG.