H. Luschgy WS 2013/14

Blatt 10

Stochastische Prozesse I
Übungen

Besprechungstermin: 23.01.14, 14.30 Uhr

Aufgabe 40. (Filtrationen)

a) Es seien $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(t) = 0$ für $0 \le t \le 1/2$, $f(t) > 0$ für $t > 1/2$. Der Prozess $X = (X_t)_{t \ge 0}$ mit $X_t(\omega) := \omega f(t)$ hat offenbar stetige Pfade. Zeigen Sie: $\mathbb{F}^X$ ist nicht cad.

b) Z sei eine $\{+1, -1\}$-wertige ZV mit $P(Z = +1) = p, P(Z = -1) = 1 - p, p \in (0,1)$, $X_t := tZ$ für $t \ge 0$, $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$ und

$$\tau := \inf\{t \ge 0 : X_t > 0\}.$$

Zeigen Sie: $\mathbb{F}$ ist nicht cad, τ ist eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit, aber keine $\mathbb{F}$-Stoppzeit.

Aufgabe 41

Im W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\}, \mathcal{G}^* = \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N})$ und $\mathbb{F}$ eine Filtration Zeigen Sie:

a) Für $F \in \mathcal{F}$ gilt
$$F \in \mathcal{G}^* \;\Leftrightarrow\; \exists G \in \mathcal{G} \text{ mit } P(F \triangle G) = 0.$$

b) Ist Y eine Modifikation des $\mathbb{F}$-adaptierten $\mathcal{X}$-wertigen Prozesses X, so ist Y $\mathbb{F}^*$-adaptiert.

Aufgabe 42. (Lévy-Prozesse und Martingale)

$X = (X_t)_{t \ge 0}$ sei ein f.s. cadlag $\mathbb{F}$-Lévy-Prozess. Zeigen Sie:

a) $\left(\dfrac{e^{iaX_t}}{Ee^{iaX_t}}\right)_{t \ge 0}$ ist ein f.s. cadlag komplexes $\mathbb{F}$-Martingal, $a \in \mathbb{R}$.

b) $E|X_t| < \infty \;\forall t \ge 0 \;\Rightarrow (X_t - EX_t)_{t \ge 0}$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal .
(Es folgt übrigens aus $E|X_1| < \infty$ schon $E|X_t| < \infty \;\forall t$ und $EX_t = tEX_1$.)

Aufgabe 43. (Poisson-Prozess und Martingale)

$X = (X_t)_{t \ge 0}$ sei ein $\mathbb{F}$-Poisson-Prozess mit Intensität $c > 0$ und $M_t = X_t - ct, t \ge 0$. (M ist dann nach Aufgabe 42 b) ein $\mathbb{F}$-Martingal mit $[M] = X$ nach Aufgabe 39.) Zeigen Sie:

a) $(M_t^2 - ct)_{t \ge 0}$ und $M^2 - [M]$ sind $\mathbb{F}$-Martingale.

b) $\exp(aM + b[M])$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal

$$\Leftrightarrow a > -1 \text{ und } b = -a + \log(1 + a).$$

Hinweis: Für $Y \sim$ Poi(λ) gilt

$$Ee^{aY} = \exp[\lambda(e^a - 1)], a \in \mathbb{R}, EY = \lambda \text{ und } EY^2 = \lambda^2 + \lambda.$$