H. Luschgy

WS 2013/14
Blatt 1

# Stochastische Prozesse I

## Übungen

**Besprechungstermin: 7.11 .13, 14.15 Uhr**

Aufgabe 1. (Ein seltsames Martingal)
Es sei $\Omega = I\!N, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . Zeigen Sie, dass $X = (X_n)_{n \geq 0}$ mit

$$X_n = (n+1)1_{\{n+1, n+2, \ldots\}}$$

ein $I\!F$-Martingal ist für die Filtration $I\!F = (\mathcal{F})_{n \geq 0}, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(\{1\}, \ldots \{n\}, \{n+1, n+2, \ldots\}), n \geq 1$.

Aufgabe 2. (Dichteprozeß)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein W-Raum, $I\!F = (\mathcal{F}_n)_{n \in I}$ eine Filtration und $Q$ ein lokal $P$-absolut stetiges $W$-Maß auf $\mathcal{F}$, d.h. $Q|\mathcal{F}_n \ll P|\mathcal{F}_n \; \forall n \in I$ ($I = I\!N_0$ oder $I = \{0, \ldots, N\}$). Zeigen Sie für den Dichteprozess $L = (L_n)_{n \in I}, L_n := \frac{dQ|\mathcal{F}_n}{dP|\mathcal{F}_n}$:

a) $L$ ist ein (positives) $P$-Martingal mit $E_P L_n = 1 \;\; \forall n \in I$.

b) Für jeden $I\!F$-adaptierten Prozess $X$ gilt:

$$X \text{ ist } Q-\text{Martingal} \;\Leftrightarrow\; XL := (X_n L_n)_{n \in I} \text{ ist } P-\text{Martingal.}$$

c) Für $I = \{0, \ldots N\}$ und $Z \in \mathscr{L}^1(Q), Z \; \mathcal{F}_N$-messbar gilt

$$L_n E_Q(Z \mid \mathcal{F}_n) = E_P(L_N Z \mid \mathcal{F}_n), n \in I.$$

Aufgabe 3. (Diskretes Doléans Exponential)
$X = (X_n)_{n \geq 0}$ sei eine $I\!F$-adaptierte Folge und $Y_0$ eine $\mathcal{F}_0$-messbare ZV. Berechnen Sie die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$Y = Y_0 + Y_- \cdot X,$$

wobei $(Y_-)_n := Y_{n-1}, n \geq 1$. Diese Lösung ist $I\!F$-adaptiert und heißt im Fall $Y_0 = 1$ diskretes Doléans Exponential von $X$.
Hinweis: $Y_n = Y_0 \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \triangle X_i)$.

Aufgabe 4. (Martingaltest für Submartingale)
Zeigen Sie: Ein Submartingal (Supermartingal) $X$ ist genau dann ein Martingal, wenn die Folge $(EX_n)_{n \in I}$ konstant ist.