H. Luschgy

Funktionale Quantisierung für stochastische Prozesse

Übungen

Aufgabe 6.
Sei $P \in M^1(\mathbb{R})$ ein um 0 symmetrisches W-Maß mit $P(\{0\}) = 0$ und $\int x^2 dP(x) < \infty$. Zeigen Sie:

$$\{-E|X|, E|X|\} \in S_{2,2}(P, \mathbb{R}).$$

(Ist P stark unimodal, z.B. $P = N(0, \sigma^2)$, so folgt

$$\mathcal{C}_{2,2}(P, \mathbb{R}) = S_{2,2}(P, \mathbb{R}) = \{\{-E|X|, E|X|\}\}$$

aus Satz 5.6. Im allgemeinen kann es noch andere 2-stationäre Quantisierer für $r = 2$ geben.)

Aufgabe 7
Seien $P \in M^1(\mathbb{R}^d)$ mit $P \ll \lambda^d$ und stetiger, beschränkter λ^d-Dichte h, $\int ||x||^{r+\delta} dP(x) < \infty$ für ein $\delta > 0$ und $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ein asymptotisch $L^r(\mathbb{P})$-optimaler n-Quantisierer für P. Zeigen Sie

$$\frac{1}{n} \sum_{a \in \alpha_n} (h(a)^{r/(d+r)} \int h^{d/(d+r)} d\lambda^d) \delta_a \xrightarrow{d} P$$

für $n \to \infty$.

Dies und 1.8 liefern die Heuristik für eine berühmte, hier präzisierte Vermutung in der Elektrotechnik:

$$P(A_{a_n}) \approx \frac{h(a_n)^{r/(d+r)} \int h^{d/(d+r)} d\lambda^d}{n}$$

für jede Voronoi-Zerlegung $\{A_a : a \in \alpha_n\}$ bezüglich α_n und $a_n \in \alpha_n, n \geq 1$.