T. Kalmes
H. Luschgy

Blatt 14
WS 2007/08

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

(Keine Abgabe, Besprechung Anfang SS)

Aufgabe 51

Zeigen Sie, daß $\{x \mapsto x^n : x \in I\!R, n \in I\!N\}$ keine bestimmende Klasse für

$$M^1(I\!R) := \{P : P \text{ W-Maß auf } \mathcal{B}(I\!R)\} \quad \text{ist (vgl. A. 37)}$$

Hinweis (Beispiel von C.C. Heyde): Sei f_0 die λ-Dichte der log-Normalverteilung, d.h. der Verteilung von $N(0,1)^g$ mit $g(x) = \exp(x)$, und $f_a(x) = f_0(x)[1+a\sin(2\pi\log x)]1_{(0,\infty)}(x)$, $-1 \leq a \leq 1$. Dann gilt $P_a := f_a\lambda \in M^1(I\!R), \int x^n dP_a(x) = \int x^n dP_b(x)$ für alle $n \in I\!N, -1 \leq a, b \leq 1$, aber es ist $P_a \neq P_b$ für a$\neq b$.

Aufgabe 52 (Box-Muller Algorithmus)

Sei $Q = f\lambda^2$ ein W-Maß auf $\mathcal{B}(I\!R^2)$ mit $f = 1_{(0,1)^2}$ und $g = (g_1, g_2) : (0,1)^2 \to I\!R^2$,

$$g_1(x) = \sqrt{-2\log x_1}\ \cos(2\pi x_2),$$

$$q_2(x) = \sqrt{-2\log x_1}\ \sin(2\pi x_2).$$

Zeigen Sie: $Q^g = h\lambda^2$ mit

$$h(y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}), y \in I\!R^2$$

(Q^g ist also eine 2-dimensionale Standardnormalverteilung).

Aufgabe 53

Sei $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, und $Q = U(D)$ (die uniforme Verteilung auf dem Dreieck $D \subset [0,1]^2$), μ die x-Randverteilung von Q und $K : [0,1] \times \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$,

$$K(x,B) = U([0,x])(B).$$

Zeigen Sie: K ist ein Markov-Kern,

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$$

und

$$\mu \otimes K = Q.$$