T. Kalmes
H. Luschgy

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

Abgabetermin: 23.01.2008, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f \geq 0$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) := f(\min\{n \in \mathbb{Z} : n > x\})$ (siehe Aufgabe 28).

Zeigen Sie: $\int h d\lambda = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$.

Aufgabe 39 (4 Punkte)
Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$A_k = [\frac{k - 2^{n(k)-1}}{2^{n(k)-1}}, \frac{k + 1 - 2^{n(k)-1}}{2^{n(k)-1}}] \text{ mit } 2^{n(k)-1} \leq k < 2^{n(k)}, n(k) \in \mathbb{N}.$$

Ferner sei $f_k = 1_{A_k}$ und $\mu = \lambda_{[0,1]}$.

Zeigen Sie:

$f_k \overset{\mathcal{L}^1(\mu)}{\to} 0$, jedoch gilt nicht $f_k \to 0$ $\mu-$f.s.

Aufgabe 40 (4 Punkte)
Zeigen Sie für $I_n(\alpha) := \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\alpha x} d\lambda(x), \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \to \infty} I_n(\alpha) = \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} d\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & , \quad \alpha < 1 \\ \infty & , \quad \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Hinweis: $I_n(\alpha) = \int_0^\infty f_n(x) e^{\alpha x} d\lambda(x)$ mit $f_n(x) = 1_{[0,n]}(x)(1 - \frac{x}{n})^n, x \geq 0$.

Aufgabe 41 (Verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung / 4 Punkte)
Seien $f_n \in \mathscr{L}_+, , n \in \mathbb{N}$ und $p \geq 1$. Zeigen Sie:

$$|| \sum_{n=1}^\infty f_n ||_p \leq \sum_{n=1}^\infty ||f_n||_p.$$

Aufgabe 42 (5 Bonuspunkte)
Zeigen Sie, dass der seminormierte Raum $\mathscr{L}^p(\mu)$ für $p \geq 1$ vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathscr{L}^p$ ist $\mathscr{L}^p$.konvergent.