T. Kalmes
H. Luschgy

Blatt 8
WS 2007/08

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

Abgabetermin: 19.12.2007, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 29 (Faktorisierungssatz/4 Punkte)
Seien $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ein meßbarer Raum, $g : \Omega_1, \to \Omega_2$, $f : \Omega_1 \to \overline{I\!R}$. Zeigen Sie:
f ist $g^{-1}(\mathcal{A}_2)$-meßbar $\Leftrightarrow$ es existiert eine $\mathcal{A}_2$-meßbare Funktion $h : \Omega_2 \to \overline{I\!R}$ mit $f = h \circ g$ (s.7.17).

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.16 (Standardschluss) der Vorlesung.

Aufgabe 30 (Median/2+2 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to I\!R$ eine $\mathcal{A}$-meßbare Zufallsvariable. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Med}(X) := \{m \in I\!R : P^X([m, \infty)) \geq \frac{1}{2}, P^X((-\infty, m]) \geq \frac{1}{2}\}$ ist ein kompaktes, nichtleeres Intervall. (Jedes $m \in \mathrm{Med}(X)$ heißt Median von X bzw. P^X.)

b) Berechnen Sie $\mathrm{Med}(X)$ für eine $W(a, b)$-verteilte Zufallsvariable (s. Aufgabe 25).

Aufgabe 31 (4 Punkte)
Es sei $P = U(0, 1)$, die uniforme Verteilung auf [0,1] und es sei

$$f : [0,1] \to [0,1], f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & , \quad 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}([0,1]))$-messbar ist und das $P^f = P$ gilt.
Hinweis: Beispiel 6.6.

Aufgabe 32 (2 Punkte)
Es seien $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Zeigen Sie:

$$\frac{f}{g} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}),$$

wobei f/g auf $\{g = 0\}$ geeignet zu definieren ist.