T. Kalmes
H. Luschgy

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

Abgabetermin: 12.12.2006, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 25 (3 Punkte)
Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass durch

$$F(x) = \frac{\exp(\frac{x}{a})}{1+\exp(\frac{x}{a})}, x \in I\!R \text{ (logistische Verteilung, } L(a))$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-\exp(-(\frac{x}{a})^b) & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{(Weibull-Verteilung, } W(a,b))$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-(\frac{a}{x})^b & , \quad x \geq a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases} \quad \text{(Pareto-Verteilung, } Pa(a,b))$$

stetige Verteilungsfunktionen definiert werden.

Aufgabe 26 (4 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein σ-endlicher Maßraum mit $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Zerlegung

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

von μ gibt mit einem diskreten Maß μ_1 auf $\mathcal{A}$ (d.h. $\mu_1(\Omega_0^c) = 0$ für eine abzählbare Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$) und einem stetigen Maß μ_2 auf $\mathcal{A}$ (d.h. $\mu_2(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$).
Hinweis: Lemma 6.8

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 7.8 b), c) der Vorlesung.

Aufgabe 28 (3+3 Punkte)
a) Es sei $f : Z\!\!Z \to I\!R$. Zeigen Sie, dass

$$h : I\!R \to I\!R, h(x) := f(\min\{n \in Z\!\!Z : n > x\})$$

Borel-meßbar ist.
b) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ Meßräume, $f : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

i) $f(\Omega)$ ist abzählbar

ii) $\{\{x\}, x \in f(\Omega)\} \subset \mathcal{B}$.

Zeigen Sie, dass f genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meßbar ist, wenn $f^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt.