T. Kalmes
H. Luschgy

Blatt 6
WS 2007/08

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

Abgabetermin: 5.12.2005, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 21 (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}), \mu \mid \mathcal{E}$ σ-endlich.
Beweisen Sie die "Approximationseigenschaft":
Zu $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ existiert eine Menge $C \in \mathcal{E}$ mit $\mu(A \triangle C) \leq \varepsilon$.

Hinweis: Man approximiere A mit Hilfe von Korollar 5.14 durch eine Menge der Form $\cup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in \mathcal{E}$. Sodann approximiere man diese Menge durch eine endliche Vereinigung.

Aufgabe 22 (Vollständige Maßräume/7 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\mu &:= \{A \subset \Omega : \exists N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0, A \subset N\}, \\ \mathcal{A}_\mu &:= \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu). \end{aligned}$$

Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt vollständig, falls $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$ d.h. $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}$ gilt. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}_\mu = \{B \subset \Omega : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \subset B \subset A_2, \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}$.

b) $\overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to \overline{I\!R}_+,\ \overline{\mu}(B) := \mu(A_2)$ (mit A_2 aus a)) ist (einziges) Maß auf $\mathcal{A}_\mu$ mit $\overline{\mu} \mid \mathcal{A} = \mu$.

c) $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \overline{\mu})$ is ein vollständiger Maßraum (und heißt Vervollständigung von $\Omega, \mathcal{A}, \mu)$).

d) μ σ-endlich $\Rightarrow \mathcal{A}_\mu = \mathcal{M}(\mu^*), \overline{\mu} = \mu^* \mid \mathcal{A}_\mu$.
Für beliebige Maße ist dies i.a. falsch.

Hinweis zu d): $\Omega = I\!R, \mathcal{A} = \{A \subset I\!R : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}, \mu(A) = \begin{cases} 0 & , \quad A = \emptyset \\ \infty & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 23 (Liouville-Zahlen/4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Menge L der Liouville-Zahlen $\lambda(L) = 0$ gilt.

Hinweis: Es genügt $\lambda(L \cap [-k, k]) = 0$ für alle $k \in I\!N$ zu zeigen. Hierzu stelle man L wie in Aufgabe 14 dar.
Bem.: L ist nicht abzählbar und dicht in $I\!R$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)
F und G seien (eindimensionale) Verteilungsfunktionen, $a \in I\!R, b \in (0, \infty)$.
Zeigen Sie, dass auch $F^b, \exp(-\frac{1-F}{F}), x \mapsto F(x+a), x \mapsto F(bx), F \cdot G, \max\{F, G\}$ und $\min\{F, G\}$ Verteilungsfunktionen sind.