T. Kalmes
H. Luschgy

Blatt 5
WS 2007/08

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

Abgabetermin: 28.11.2007, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (A_n) eine Folge aus $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \text{ falls } \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0 \text{ (Borel-Cantelli-Lemma, 1. Teil).}$$

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Es sei

$$\Omega = \mathbb{Q}, \mathcal{A} = \{(a,b] \cap \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\},$$
$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+, \mu((a,b] \cap \mathbb{Q}) = b - a.$$

Beweisen Sie: $\mathcal{A}$ ist Semiring über Ω und μ ist endlich additiv (und endlich), von unten und oben stetig, aber nicht σ-additiv.
Hinweis: Dieses Beispiel illustriert, dass Satz 5.4 nicht für Semiringe gilt.

Aufgabe 19 (2+2+2 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:
a) $\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, B \subset A\}, B \subset \Omega$.
b) Zu jeder Menge $B \subset \Omega$ existiert eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ und $\mu^*(B) = \mu(A)$.

Hinweis zu b): Mit Hilfe von a) gewinne man eine Folge von A_n's und konstruiere aus dieser A.

c) Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ σ-additiv, μ^* das zugehörige äußere Maß und $\mathcal{M}(\mu^*)$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen. Ferner sei $\tilde{\mu}$ das zu $\mu^*_{|\mathcal{M}(\mu^*)}$ gehörige äußere Maß. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu} = \mu^*$.

Aufgabe 20 (once more: σ-Algebra / 5 Bonuspunkte)
Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω mit unendlich vielen Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ überabzählbar ist.