T. Kalmes
H. Luschgy
WS 2007/08

Blatt 4

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

Abgabetermin: 21.11.2007, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 13 (Borelsche σ-Algebra/4 Punkte)
Es seien $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{E}_3$ die in Satz 4.8 a) definierten Mengensysteme, also $\mathcal{E}_2 = \{\{x \in \mathbb{R}^n : x \leq a\} : a \in \mathbb{R}^n\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{Q}^n, a \leq b\}$.
Man beweise: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$.

Aufgabe 14 (Liouville-Zahlen/4 Punkte)
Zeigen Sie: $L := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist Liouville-Zahl } \} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dabei heißt $x \in \mathbb{R}$ Liouville-Zahl, wenn $x \notin \mathbb{Q}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 2$ existieren mit

$$| x - \frac{p}{q} | < \frac{1}{q^n}.$$

Aufgabe 15 (5 Punkte)
Man beweise Satz 5.2.

Aufgabe 16 (3 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Zeigen Sie für $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ falls } \mu(A_n \cap A_m) = 0 \text{ für } n \neq m.$$