T. Kalmes
H. Luschgy
WS 2007/08

Blatt 3

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Übungen

Abgabetermin: 14.11.2007, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 9 (Poisson-Approximation der Binomialverteilung/4 Punkte)
Man beweise den "Poissonschen lokalen Grenzwertsatz":
Sei $\lambda > 0$ und (p_n) eine Folge aus $(0,1)$ mit

$$np_n \to \lambda, n \to \infty.$$

Dann folgt $\lim_{n\to\infty} B(n,p_n)(\{k\}) = Poi(\lambda)(\{k\}), k \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Man verwende $(1-p_n)^n \to e^{-\lambda}$.

Aufgabe 10 (Binomialapproximation der hypergeometrischen Verteilung/4 Punkte)
Es seien $n \in \mathbb{N}, k \in \{0,\ldots,n\}, p \in (0,1)$ und eine Folge $(M_N)_{N\geq n}$ natürlicher Zahlen mit $M_N \leq N$ und $\frac{M_N}{N} \to p, N \to \infty$ gegeben.
Man zeige:

$$\lim_{N\to\infty} H(N, M_N, n)(\{k\}) = B(n,p)(\{k\}).$$

Hinweis: Man klammere aus $H(N, M_N, n)(\{k\})$

$$\binom{n}{k} \text{ und } [\frac{M_N!(N-k)!}{N!(M_N-k)!}] \cdot [\frac{(N-M_N)!(N-n+k)!}{(N-M_N-n+k)!N!}]$$

aus und untersuche die Konvergenz der einzelnen Faktoren.

Aufgabe 11 (σ-Algebren/3+3 Punkte)
a) $\mathcal{A}$ sei eine σ-Algebra über Ω und $B \subset \Omega$. Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \{B\}) = \{A_1 \cap B + A_2 \cap B^c : A_i \in \mathcal{A}, i = 1,2\}.$$

b) $\mathcal{E} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ sei eine (abzählbare) Zerlegung von Ω, d.h. die A_n sind paarweise disjunkt und $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \{A(I) : I \subset \mathbb{N}\}$$

mit $A(I) := \bigcup_{n \in I} A_n$.

Aufgabe 12 (σ-Algebren/4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_n$ die von $\{\{1\}, \ldots \{n\}\}$ über $\mathbb{N}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie:

$$\mathcal{A}_n = \{A \subset \mathbb{N} : A \subset \{1, \ldots, n\} \text{ oder } A^c \subset \{1, \ldots, n\}\}.$$

Ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ eine σ-Algebra über $\mathbb{N}$?