Stochastische Prozesse I

Übungen

Besprechungstermin: 17.12.08, 12.00 Uhr und 18.12.08, 14.00 Uhr

Aufgabe 27. (Cox, Ross, Rubinstein-Modell, 1 Aktie, 1 Bankguthaben)
$(Y_n)_{1\leq n\leq N}$ seien iid ZV mit $P(Y_1 = u) = p = 1 - P(Y_1 = d), p \in (0,1), 0 < d < u$,

$$\begin{aligned} A_n &= A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i,\ A_0 > 0 \text{ Konstante,} \\ B_n &= B_0(1+r)^n, B_0 > 0, r \geq 0 \text{ Konstanten.} \end{aligned}$$

Der Preisprozeß ist $S = (B, A)$ und der Informationsverlauf wird beschrieben durch

$\mathbb{F} = \mathbb{F}^A$ $(I = \{0, \ldots, N\})$.

Konstruieren Sie im Fall $u \leq 1 + r$ und im Fall $1 + r \leq d$ jeweils eine Arbitragestrategie.

Aufgabe 28. Bestätigen Sie im arbitragefreien CRR-Modell die Rückwärtsrekursion

$$V(N, x) = f(x),$$

$$V(n, x) = \frac{1}{1+r}[qV(n+1, ux) + (1-q)V(n+1, dx)], 0 \leq n \leq N-1, x > 0,$$

für die Preisfunktion V eines pfadunabhängigen Claims $C = f(A_N)$. Bestätigen Sie ferner die Formel

$$H_n^1 = \frac{V(n, uA_{n-1}) - V(n, dA_{n-1})}{(u-d)A_{n-1}},$$

$$H_n^0 = \frac{(1+r)^{-n}}{B_0}(V(n, A_n) - H_n^1 A_n), 1 \leq n \leq N$$

für die Hedgingstrategie $H = (H^0, H^1)$ für $C = f(A_N)$ (s. 5.5 und 5.7 der Vorlesung).

Aufgabe 29. (Put Option)
Im CRR-Modell sei A_n der Preis von 100 USD in Schweizer Franken (SFR) zum Zeitpunkt n. Es sei $r = 0, A_0 = 150$ SFR,

$$A_1 = \begin{cases} 180 \text{ SFR} & \text{mit W.keit } \frac{1}{2} \\ 90 \text{ SFR} & \text{mit W.keit } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Preis einer europäischen Put Option mit Strike-Preis 150 SFR und eine Hedgingstrategie für $N = 1$ und $N = 2$.

Hinweis: Beispiel 5.6

Aufgabe 30. (Down-and-out Call)
Im arbitragefreien CRR-Modell läßt sich der Preisprozeß $(V_n)_{n\in I}$ des Down-and-out Call

$$C = (A_N - K)^+ 1_{\{\min_{0\le j\le N} A_j > B\}}, 0 < B < A_0, K > 0$$

durch die Preisfunktion darstellen:

$$V_n = V(n, A_n, \min_{0\le j\le n} A_j), n \in I \qquad (\text{ s. } 3.6, 5.8).$$

Bestätigen Sie für die Preisfunktion V die Rückwärtsrekursion:

$$\begin{aligned} V(N,x,z) &= (x-K)^+ 1_{(B,\infty)}(z), \\ V(n,x,z) &= \tfrac{1}{1+r}[qV(n+1,xu,z\wedge xu) + (1-q)V(n+1,xd,z\wedge xd)], 0 \le n \le N-1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie damit den Preis von C z.Z. $n = 0$ mit den Daten von Aufgabe 29.