Stochastische Prozesse I

Übungen

Besprechungstermin: 27.11.08, 14.00 Uhr

Aufgabe 17.(Galton-Watson-Verzweigungsprozeß, GWP)
Der GWP ist ein einfaches Modell für Populationswachstum. Zu Beginn - 0-te Generation - besteht die Population aus X_0 Mitgliedern (oft $X_0 = 1$). Die Anzahl der Nachkommen des j-ten Individuums aus der $(n-1)$-ten Generation sei $Y_{n,j}$. Dann ist die Anzahl der Mitglieder der n-ten Generation

$$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} Y_{n,j}, n \geq 1.$$

Die Anzahl der Nachkommen sei für jedes Individuum identisch verteilt und die Individuen reproduzieren unabhängig voneinander und unabhängig von der Anzahl der Mitglieder der eigenen und aller vorhergehenden Generationen, d.h.

$(Y_{n,j})_{n,j\geq 1}$ sind iid $\mathbb{N}_0$-wertige ZV,

X_0 ist $\mathbb{N}_0$-wertige ZV

und $X_0, (Y_{n,j})_{n,j\geq 1}$ sind unabhängig.

Ferner sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ mit

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Y_{i,j},\ 1 \leq i \leq n,\ j \in \mathbb{N}),$$

$EX_0 > 0$ und $a := EY_{1,1} > 0$. Zeigen Sie:

a) Der GWP $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ist ein $\mathbb{F}$-Markov-Prozeß mit Zustandsraum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ und ÜK $R(x, \cdot) = P^{\sum_{j=1}^{x} Y_{1,j}}$ $(R(0, \cdot) = \delta_0)$.
Hinweis: Satz 3.5

b) Die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, f(n, x) = \frac{x}{a^n}$ ist harmonisch für X, falls $a = EY_{1,1} < \infty$, und $(X_n/a^n)_{n\geq 0}$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal, falls zusätzlich $EX_0 < \infty$.
Hinweis: Satz 3.9.

c) Für die Aussterbewahrscheinlichkeit $\eta := P(X_n \to 0)$ gilt
$\eta = P(\sum_{n=0}^{\infty} X_n < \infty)$ und daher:
$a = EY_{1,1} < 1$ (subkritischer Fall) und $EX_0 < \infty \Rightarrow \eta = 1$.

Hinweis: Teil b)

Aufgabe 18 (Markov-Prozesse)

a) Seien $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $\mathbb{F}$-Markov-Prozeß mit Zustandsraum $(\mathscr{X},\mathscr{A})$ und $\ddot{U}K$ R, $(\mathscr{Y},\mathscr{B})$ ein weiterer meßbarer Raum und $F : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ eine bijektive, bimeßbare (d.h. F und F^{-1} sind meßbar) Abbildung. Zeigen Sie, dass auch $(F(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $\mathbb{F}$-Markov-Prozeß ist und berechnen Sie den $\ddot{U}K$.

b) Seien $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine $\mathbb{F}$-adaptierte Folge $(\mathscr{X},\mathscr{A})$-wertiger ZV und R ein Markov-Kern auf $\mathscr{X}$. Zeigen Sie: Ist

$$Y_n^f := f(X_n) - \sum_{i=1}^{n}(Rf - f)(X_{i-1}), n \in \mathbb{N}_0$$

für alle beschränkten, meßbaren $f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal, so ist X $\mathbb{F}$-Markov mit $\ddot{U}K$ R.