

## Stochastische Prozesse II

### Übungen

**Besprechungstermin: 16.5.12, 14.15 Uhr**

In den folgenden Aufgaben sei  $W$  eine stetige  $\mathbb{F}$ -BM.

Aufgabe 13. (Stratonovich-Integral)

In Beispiel 3.1 der Vorlesung wurde das Integral

$$\int_0^t W_s^Z dW_s$$

definiert. Zeigen sie, dass bei Wahl der Zwischenpunkte  $t_j^* = (t_{j-1} + t_j)/2$  gilt:

$$\int_0^t W_s^Z dW_s \xrightarrow{L^2} \frac{W_t^2}{2} \quad (\delta(Z) \rightarrow 0).$$

Der so erhaltene Grenzwert heißt Stratonovich-Integral von  $W$  bzgl.  $W$ .

Hinweis: Für  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_1^n a_j(b_j - b_{j-1}) = \frac{1}{2}b_n^2 - \frac{1}{2}b_0^2 - \frac{1}{2} \sum_1^n (b_j - b_{j-1})^2 + \sum_1^n (a_j - b_{j-1})^2 + \sum_1^n (b_j - a_j)(a_j - b_{j-1})$$

Aufgabe 14 Sei

$$X_t := \mathcal{E}(aW)_t - 1, \quad t \geq 0, \quad a \neq 0.$$

Zeigen Sie für  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ :

$$X \in \mathcal{M}^2, X \notin \mathcal{H}^2, X \in \mathcal{H}_{lok}^2.$$

Aufgabe 15 Zeigen Sie für  $H, K \in \mathcal{L}^2(W)$ :

$$H = K \lambda \otimes \text{P-f.s.} \Rightarrow H \bullet W = K \bullet W \text{ P-f.s. (nicht unterscheidbar)}$$

Aufgabe 16 Sei  $H := 1_{\{W_1 < 0\}} 1_{(1,2]}$ . Zeigen Sie mit Hilfe von  $H \bullet W$ , dass

$$1_{\{W_1 < 0\}} ((W_{2 \wedge t} - W_{1 \wedge t})^2 - (2 \wedge t - 1 \wedge t))_{t \geq 0} \in \mathcal{M}$$