

## Stochastische Prozesse I

## Übungen

Besprechungstermin: 05.02.09, 14.00 Uhr

Aufgabe 43. (Filtrationen)

a) Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ ,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(t) = 0$  für  $0 \leq t \leq 1/2$ ,  $f(t) > 0$  für  $t > 1/2$ . Der Prozeß  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  mit  $X_t(\omega) := \omega f(t)$  hat offenbar stetige Pfade. Zeigen Sie:  $\mathbb{F}^X$  ist nicht cad.

b)  $Z$  sei eine  $\{+1, -1\}$ -wertige ZV mit  $P(Z = +1) = p, P(Z = -1) = 1 - p, p \in (0, 1)$ ,  $X_t = tZ$  für  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$  und

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t > 0\}.$$

Zeigen Sie:  $\mathbb{F}$  ist nicht cad,  $\tau$  ist eine  $\mathbb{F}_+$ -Stopppzeit, aber keine  $\mathbb{F}$ -Stopppzeit.

Aufgabe 44

Im  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra,  $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\}$ ,  $\mathcal{B}^* = \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{N})$  und  $\mathbb{F}$  eine Filtration Zeigen Sie:

a) Für  $F \in \mathcal{F}$  gilt

$$F \in \mathcal{B}^* \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } P(F \Delta B) = 0.$$

b) Ist  $Y$  eine Modifikation des  $\mathbb{F}$ -adaptierten  $\mathcal{X}$ -wertigen Prozesses  $X$ , so ist  $Y$   $\mathbb{F}^*$ -adaptiert.

Aufgabe 45. (Lévy-Prozesse und Martingale)

$X = (X_t)_{t \geq 0}$  sei ein f.s. cadlag  $\mathbb{F}$ -Lévy-Prozeß. Zeigen Sie:

a)  $(\frac{e^{iaX_t}}{Ee^{iaX_t}})_{t \geq 0}$  ist ein f.s. cadlag komplexes  $\mathbb{F}$ -Martingal,  $a \in \mathbb{R}$ .

b)  $E|X_t| < \infty \forall t \geq 0 \Rightarrow (X_t - EX_t)_{t \geq 0}$  ist ein  $\mathbb{F}$ -Martingal.  
(Es folgt übrigens aus  $E|X_1| < \infty$  schon  $E|X_t| < \infty \forall t$  und  $EX_t = tEX_1$ .)

Aufgabe 46. (Poisson-Prozeß und Martingale)

$X = (X_t)_{t \geq 0}$  sei ein  $\mathbb{F}$ -Poisson-Prozeß mit Intensität  $c > 0$  und  $M_t = X_t - ct, t \geq 0$ . (M ist dann nach Aufgabe 45 b) ein  $\mathbb{F}$ -Martingal mit  $[M] = X$  nach Aufgabe 42.) Zeigen Sie:

a)  $(M_t^2 - ct)_{t \geq 0}$  und  $M^2 - [M]$  sind  $\mathbb{F}$ -Martingale.

b)  $\exp(aM + b[M])$  ist ein  $\mathbb{F}$ -Martingal

$$\Leftrightarrow a > -1 \text{ und } b = -a + \log(1 + a)$$

Hinweis: Für  $Y \sim \text{Poi}(\lambda)$  gilt

$$Ee^{aY} = \exp[\lambda(e^a - 1)], a \in \mathbb{R},$$

$$EY = \lambda \text{ und } EY^2 = \lambda^2 + \lambda.$$