H. Luschgy WS 2008/09

Blatt 10

Stochastische Prozesse I

Übungen

Besprechungstermin: 15.1.09, 14.00 Uhr

Aufgabe 35 (Poisson-Prozeß)
Für die Untersuchung des Poisson-Prozesses sind folgende Formeln zu bestätigen (s. Beispiel 7.3).

a) Für $A_n(a,b) := \{x \in I\!R^n : a < x_1 < \ldots < x_n < b\}, a, b \in I\!R, a < b, n \in I\!N$ gilt

$$\lambda^n(A_n(a,b)) = \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

b) $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ seien iid $E(1/c)$-verteilt, $c > 0, S_j := \sum\limits_{i=1}^{j} Z_i$. Für die λ^n-Dichte f der Verteilung von $(Z_1, \ldots, Z_n)$ gilt also

$$f(z) = c^n \exp(-c \sum_{i=1}^{n} z_i) 1_{(0,\infty)^n}(z).$$

Dann ist g mit

$$g(y) := c^n \exp(-cy_n) 1_{\{y \in I\!R^n : 0 < y_1 < \ldots < y_n\}}(y)$$

λ^n-Dichte der Verteilung von $(S_1, \ldots, S_n)$.

Aufgabe 36. (Poisson-Prozeß)
$X = (X_t)_{t \geq 0}$ sei ein Poisson-Prozeß mit Intensität $c > 0$. Zeigen Sie:

a)

$$\begin{aligned} P(X_t = 0) &= 1 - ct + o(t), \\ P(X_t = 1) &= ct + o(t), \\ P(X_t \geq 2) &= o(t) \text{ für } t \to 0, t > 0, \\ \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \tfrac{P(X_t = 1)}{P(X_t \geq 1)} &= 1. \end{aligned}$$

b) (SLLN)

$$\frac{X_t}{t} \to EX_1 \text{ f.s.}, \ t \to \infty, EX_1 = c.$$

(Dies gilt übrigens für jeden (reellen) f.s. cadlag Lévy-Prozeß X mit $E \mid X_1 \mid < \infty$.)

Aufgabe 37. (BM, Brownsche Brücke)
$W = (W_t)_{t \geq 0}$ sei eine BM. Zeigen Sie:

a) $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit $X_t := W_{s+t} - W_s$ für ein $s \geq 0$ ist eine BM.

b) $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ mit $X_t := W_t - tW_1$ ist ein f.s. stetiger, zentrierter Gauß-Prozeß mit $X_0 = X_1 = 0$ f.s. und Kovarianzfunktion $\Gamma_X(s,t) = \min\{s,t\}$-$st$. ($X$ heißt Brownsche Brücke auf [0,1].)

Aufgabe 38. (Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß)
Ein reeller, f.s. stetiger, zentrierter Gauß-Prozeß mit Kovarianzfunktion

$$\Gamma(s,t) = \beta e^{-\alpha|s-t|}, s, t \geq 0$$

heißt (stationärer) Ornstein-Uhlenbeck (OU)-Prozeß mit Parametern $\alpha, \beta > 0$. Zeigen Sie: $(X_t)_{t\geq 0}$ mit

$$X_t := e^{-\alpha t} W_{\beta \exp(2\alpha t)}$$

ist ein OU-Prozeß. Dabei ist W eine BM.