

Stochastische Prozesse I

Übungen

Besprechungstermin: 30.10.08, 14.00 Uhr

Aufgabe 1. (Ein seltsames Martingal)

Es sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Zeigen Sie, dass $X = (X_n)_{n \geq 0}$ mit

$$X_n = (n+1)1_{\{n+1, n+2, \dots\}}$$

ein \mathbb{F} -Martingal ist für die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\{1\}, \dots, \{n\}, \{n+1, n+2, \dots\})$, $n \geq 1$.

Aufgabe 2. (Dichteprozess)

(Ω, \mathcal{F}, P) sei ein W-Raum, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in I}$ eine Filtration und Q ein lokal P -absolut stetiges W -Maß auf \mathcal{F} , d.h. $Q|_{\mathcal{F}_n} \ll P|_{\mathcal{F}_n} \forall n \in I$ ($I = \mathbb{N}_0$ oder $I = \{0, \dots, N\}$). Zeigen Sie für den Dichteprozess $L = (L_n)_{n \in I}$, $L_n := \frac{dQ|_{\mathcal{F}_n}}{dP|_{\mathcal{F}_n}}$:

a) L ist ein (positives) P -Martingal mit $E_P L_n = 1 \quad \forall n \in I$.

b) Für jeden \mathbb{F} -adaptierten Prozeß X gilt:

$$X \text{ ist } Q\text{-Martingal} \Leftrightarrow XL := (X_n L_n)_{n \in I} \text{ ist } P\text{-Martingal.}$$

c) Für $I = \{0, \dots, N\}$ und $Z \in \mathcal{L}^1(Q)$, Z \mathcal{F}_N -meßbar gilt

$$L_n E_Q(Z | \mathcal{F}_n) = E_P(L_N Z | \mathcal{F}_n), n \in I.$$

Aufgabe 3. (Diskretes Doléans Exponential)

$X = (X_n)_{n \geq 0}$ sei eine \mathbb{F} -adaptierte Folge und Y_0 eine \mathcal{F}_0 -meßbare ZV. Berechnen Sie die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$Y = Y_0 + Y_- \cdot X,$$

wobei $(Y_-)_n := Y_{n-1}$, $n \geq 1$. Diese Lösung ist \mathbb{F} -adaptiert und heißt im Fall $Y_0 = 1$ diskretes Doléans Exponential von X .

Hinweis: $Y_n = Y_0 \prod_{i=1}^n (1 + \Delta X_i)$.

Aufgabe 4. (Martingaltest für Submartingale)

Zeigen Sie: Ein Submartingal (Supermartingal) X ist genau dann ein Martingal, wenn die Folge $(EX_n)_{n \in I}$ konstant ist.