

Stochastische Prozesse I

Übungen

Besprechungstermin: 04.12.08, 14.00 Uhr

Aufgabe 19. (Konvexität von \mathbb{P})

Beweisen Sie bitte Satz 4.7 der Vorlesung: \mathbb{P} ist konvex

Aufgabe 20. (Unendlicher Horizont)

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien iid ZV auf (Ω, \mathcal{F}, P) mit $P(Y_1 = +1) = p = 1 - P(Y_1 = -1), p \neq \frac{1}{2}, X_n = \sum_{i=1}^n Y_i,$

$X_0 = 0, \mathbb{F} = \mathbb{F}^Y$. Bekanntlich ist $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kein P -Martingal Zeigen Sie:

Es existiert kein zu P äquivalentes Martingalmaß auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ für $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 21. (Arbitrage)

Zeigen Sie: Falls im N -Perioden Marktmodell eine Arbitragestrategie existiert, dann gibt es auch eine Arbitragestrategie K mit der Eigenschaft $V_n(K) \geq 0 \forall n \in I = \{0, \dots, N\}$.

Hinweis: Falls $P(V_j(H) < 0) > 0$ für eine Arbitragestrategie H , definiere

$$n := \max\{0 \leq j \leq N - 1 : P(V_j(H) < 0) > 0\},$$

$$U_j := \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq n \\ H_j 1_{\{V_n(H) < 0\}}, & n + 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

und dann K via Lemma 4.9.

Aufgabe 22. Gegeben sei ein Kapitalmarkt, auf dem zu den Zeitpunkten $n \in I = \{0, 1\}$ eine risikolose Anleihe und 2 Aktien gehandelt werden. Die Preise $S_n^0(w)$ der Anleihe und $S_n^i(w)$ der Aktien $i \in \{1, 2\}$ zum Zeitpunkt n im Zustand $w \in \Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$ sind in folgender Tabelle zusammengefasst, wobei $S_0^i = S_0^i(w) \forall w \in \Omega$.

i	S_0^i	$S_1^i(w_1)$	$S_1^i(w_2)$	$S_1^i(w_3)$
0	1	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{9}$
1	5	$\frac{60}{9}$	$\frac{60}{9}$	$\frac{40}{9}$
2	10	$\frac{40}{3}$	$\frac{80}{9}$	$\frac{80}{9}$

Ferner seien $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{w\}) > 0 \forall w \in \Omega$. Setze

$$W := \{x \in \mathbb{R}^3 : \exists h \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } S_0 h \text{ (Skalarprodukt)} = 0$$

$$\text{und } S_1(w_k)h = x_k \forall k \in \{1, 2, 3\}\}$$

und

$$A := \{x \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ komponentenweise, } x \neq 0\}.$$

a) Zeigen Sie: Der Kapitalmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn $W \cap A = \emptyset$.

b) Ist der Markt im vorliegenden Fall arbitragefrei oder finden Sie eine Arbitrage-Strategie? (Die Strategie können Sie mit Hilfe von a) berechnen.)