

Stochastic Finance

Übungen

Aufgabe 6 (Numerairewechsel)

Im $(1 + d, k)$ -Modell sei $\mathcal{P} \neq \emptyset$ und $Q \in \mathcal{P}$. Unter Q ist S^i/B ein Martingal $\forall i \in \{1, \dots, d\}$. Nach 1.9 gilt $Q = Q^\vartheta$ für ein $\vartheta \in \Theta_1$ und für die Dynamik von S_i unter Q gilt

$$dS_t^i = r_t S_t^i dt + S_t^i \sum_{m=1}^k \sigma_t^{im} dW_t^{\vartheta, m}, t \in [0, T],$$

wobei W^ϑ eine $IF - BM^k$ unter Q ist (s. 1.10).

Man wähle nun S^j für ein $j \in \{1, \dots, d\}$ als Numeraire und definiere ein zu Q äquivalentes W -Maß Q_{S^j} auf \mathcal{F}_T durch

$$\frac{dQ_{S^j}}{dQ} := \frac{S_T^j B_0}{B_T S_0^j}.$$

Nach 2.13 und 2.14 ist dann S^i/S^j ein Q_{S^j} -Martingal $\forall i \in \{1, \dots, d\}$. Zeigen Sie für die Dynamik von S^i unter Q_{S^j} :

$$dS_t^i = S_t^i \left(r_t + \sum_{m=1}^k \sigma_t^{im} \sigma_t^{jm} \right) dt + S_t^i \sum_{m=1}^k \sigma_t^{im} dW_t^{S^j, m}, t \in [0, T], i \in \{1, \dots, d\}$$

wobei W^{S^j} eine $IF - BM^k$ unter Q_{S^j} ist.

Hinweis: Satz von Girsanov, A 6.