H. Luschgy SS 2014

Blatt 9

Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 10.7.14, 14.30 Uhr

Aufgabe 33. Zeigen Sie für die folgenden (deterministischen) DGLn:

a) $dX_t = X_t^2 dt, X_0 = 1$

hat eine eindeutige (lokale) Lösung auf $[0, T]$ für alle $T < 1$. Es gibt keine globale Lösung auf $\mathbb{R}_+$; Bedingung (W) von Satz 6.2 ist nicht erfüllt.

b) $dX_t = 3X_t^{2/3} dt, X_0 = 0$

hat viele (globale) Lösungen auf $\mathbb{R}_+$. (L) ist nicht erfüllt.

Aufgabe 34. Bestimmen Sie die (f.s. eindeutige) Lösung der stochastischen DGL $(d = 2, k = 1)$

$$\begin{aligned}
dX_t^1 &= -\tfrac{1}{2}X_t^1 dt - X_t^2 dW_t, \\
dX_t^2 &= -\tfrac{1}{2}X_t^2 dt + X_t^1 dW_t, t \geq 0, \\
X_0 &= (X_0^1, X_0^2) = (1, 0).
\end{aligned}$$

(Es gilt $\| X_t \| = 1$ für alle $t \geq 0$. X ist eine "BM in $\{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| = 1\}$.")

Aufgabe 35. (Ornstein-Uhlenbeck Prozess)
Physikalische Erwägungen führen dazu, die Geschwindigkeit eines (kleinen) Teilchens in einer Flüssigkeit als Lösung der stochastischen DGL

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, t \geq 0, X_0 = \xi \ (E\xi^2 < \infty)$$

mit Parametern $\alpha > 0, \sigma > 0$ einzuführen.
Bestimmen Sie die (f.s. eindeutige) Lösung X dieser Gleichung und zeigen Sie:

$$X_t \xrightarrow{d} N(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}) \text{ für } t \to \infty.$$

Aufgabe 36. (Vasicek-Modell für die short rate)

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, t \geq 0$$

$a, b, \sigma, r_0 \in (0, \infty)$, W $\mathbb{E}$-BM (s. Beispiel 6.5). Der Prozess $r = (r_t)_{t \geq 0}$ ist ein Gaußprozess und ein (homogener)$\mathbb{E}$-Markovprozess (s. 6.9).

Bestimmen Sie den charakteristischen Operator von r und die Markov-Halbgruppe. Berechnen Sie damit

$$E(r_t \mid \mathcal{F}_s)$$

und

$$\operatorname{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_s) := E(r_t^2 \mid \mathcal{F}_s) - (E(r_t \mid \mathcal{F}_s))^2 \text{ für } s \leq t.$$