H. Luschgy SS 2014

Blatt 8

Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 3.7.14, 14.30 Uhr

Aufgabe 29. $W = (W^1, \ldots, W^k)$ sei eine stetige $\mathbb{F}$-$BM^k(\mathbb{F} = \mathbb{F}^*), \alpha, \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathbb{R}, x_0 \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass der Prozess X mit

$$X_t := x_0 \exp(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j W_t^j + \alpha t)$$

eine Lösung der stochastischen DGL

$$\begin{aligned} dX_t &= (\alpha + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2) X_t dt + X_t \sum_{j=1}^{k} \sigma_j dW_t^j, t \geq 0 \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

ist.
Hinweis: Mehrdimensionale Ito-Formel 4.17.

Aufgabe 30. W sei eine stetige $\mathbb{F}$-BM, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}^W)^*$ und $T < \infty$. Berechnen Sie eine Darstellung der Form

$$C = EC + \int_0^T H_s dW_s$$

für $C = \int_0^T W_s ds,\ C = W_T^3$ und $C = e^{W_T}$.

Hinweis: $E(C \mid \mathcal{F}_t)$ ist manchmal hilfreich.

Aufgabe 31. W sei eine stetige $\mathbb{F}$-BM, und $\mathbb{F} = \mathbb{F}^*, \tau$ sei eine $\mathbb{F}$-SZ und $T < \infty$. Dann ist $(W_t - \tau \wedge t)_{t \leq T}$ eine $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$-$BM$ unter einem geeigneten W-Maß Q auf $\mathcal{F}_T$. Geben Sie ein solches W-Maß Q an.

Hinweis: Satz von Girsanov.

Aufgabe 32. Für $0 < \lambda < 1/4$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$X^\varepsilon := \varepsilon^{-\lambda} \int_0^1 e^{-W_t^2/2\varepsilon} dW_t.$$

Zeigen Sie:

$$X^\varepsilon \stackrel{\mathcal{L}^2(P)}{\longrightarrow} 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$