Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 18.6.14, 16.30 Uhr

Aufgabe 25. a) Seien W^1, W^2 unabhängige $\mathbb{F}-BM$ (also $W = (W^1, W^2)$ eine $\mathbb{F}-BM^2$). Zeigen Sie, dass das Produkt W^1W^2 ein $\mathbb{F}$-Martingal ist. Dies impliziert

$$[W^1, W^2] = 0.$$

b) (Kovariation und Unabhängigkeit) Seien W eine $\mathbb{F}-BM, H := 1_{(-\infty,0)}(W_1)1_{(1,2]}$, $K := 1_{(0,\infty)}(W_1)1_{(2,3]}$ und $X := H \cdot W, Y := K \cdot W$. Zeigen Sie:

$$[X, Y] = 0,$$

aber die Martingale X, Y sind nicht unabhängig.

Aufgabe 26. Beweisen Sie mit Hilfe der Ito-Formel

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3} W_t^3 - \int_0^t W_s ds.$$

Aufgabe 27 Geben Sie die Semimartingaldarstellung (Darstellung als Ito-Prozess)

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dW_s$$

der folgenden Prozesse an:

a) $X_t = W_t^n, n \in \mathbb{N}$.

b) $X_t = 2 + t + e^{W_t}$

Hinweis: Ito-Formel

Aufgabe 28 (Doléans-Exponential)
Es sei $M = K \cdot W$ und $N = \tilde{K} \cdot W$ für $K, \tilde{K} \in \mathcal{L}^2_{lok}(W)$. Zeigen Sie für die Doléans-Exponentiale:

a)
$$\mathcal{E}(M)\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(M + N)e^{[M,N]},$$
$$\mathcal{E}(M)^{-1} = \mathcal{E}(-M)e^{[M]},$$
$$[\mathcal{E}(M)]_t = \int_0^t \mathcal{E}(M)_s^2 d[M]_s \;,\; t \geq 0.$$

b) $\mathcal{E}(M)^{-1} = 1 + \int_0^{\cdot} \mathcal{E}(M)_s^{-1} d[M]_s - \mathcal{E}(M)^{-1} \cdot M$

c) $\mathcal{E}(M)$ ist die einzige adaptierte, stetige Lösung der stochastischen DGL

$$dX_t = X_t K_t dW_t, X_0 = 1.$$

Hinweis: Beispiel 4.15.