H. Luschgy SS 2014
Blatt 6

**Stochastische Prozesse II**

**Übungen**

**Besprechungstermin: 05.6.14, 14.30 Uhr**

$W$ sei eine stetige $\mathbb{F}$-BM und $\mathbb{F} = \mathbb{F}^*$

Aufgabe 21. (a) Es sei $H \in \mathcal{L}^2_{\text{lok}}(W)$ und $\tau$ eine Stoppzeit. Zeigen Sie:

$$(H \cdot W)^\tau = (H^\tau \cdot W)^\tau = H \cdot W^\tau = H^\tau \cdot W^\tau$$

(b) (Kovariation und Stoppzeiten) $X$ und $Y$ seien Ito-Prozesse der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dW_s, Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{H}_s ds + \int_0^t \tilde{K}_s dW_s$$

und $\tau$ eine Stoppzeit. Zeigen Sie (s. Satz 4.8):

$$[X, Y]^\tau = [X^\tau, Y] = [X^\tau, Y^\tau].$$

Aufgabe 22.

a) Zeigen Sie für $H, K \in \mathcal{L}^1_{lok}(W) := \{H : H \text{ progressiv}, \int_0^t |H_s| ds < \infty \text{ P-f.s. } \forall t \geq 0\}$

$$H = K \ \lambda \otimes P\text{-f.s.} \Leftrightarrow \int_0^\cdot H_s ds = \int_0^\cdot K_s ds \quad P\text{-f.s. (nicht unterscheidbar)}$$

b) Zeigen Sie für $H, K \in \mathcal{L}^2_{lok}(W)$:

$$H = K \ \lambda \otimes P\text{-f.s.} \ \Leftrightarrow \ H \cdot W = K \cdot W \quad P\text{-f.s. (nicht unterscheidbar)}$$

(s. 3.14).

Aufgabe 23. Zeigen Sie, dass der Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit

$$X_t = t^2 W_t - 2 \int_0^t s W_s ds$$

ein (stetiges) $\mathcal{L}^2$-Martingal ist. Zeigen Sie ferner, dass

$$(X_t^2 - \frac{t^5}{5})_{t\geq 0}$$

ein Martingal ist.

Hinweis: Partielle stochastische Integration.

Aufgabe 24. Es sei

$$X_t = -t^2 + \int_0^t s dW_s \text{ und } Y_t = t^3 + \int_0^t s^2 dW_s, t \geq 0.$$

Berechnen Sie die quadratischen Variationen $[X]$ und $[Y]$ und die Kovariation $[X, Y]$.