

Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 28.5.14, 16.30 Uhr

 W sei eine stetige \mathbb{F} -BM und $\mathbb{F} = \mathbb{F}^*$ Aufgabe 17. Zeigen Sie

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t), \quad t \geq 0.$$

Hinweis: Beispiel 3.1.

Aufgabe 18. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von

$$\int_0^t W_s^n dW_s, \quad n \geq 0,$$

$$\int_0^t s dW_s, \quad \int_0^t W_s ds, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Aufgabe 19. (Aufenthaltszeiten von W)Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ seien

$$Z_t(A) := \int_0^t 1_A(W_s) ds,$$

$$X_t(A) := \int_0^t 1_A(W_s) dW_s, \quad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie $EZ_t(A)$ für $A = [0, \infty)$ und $A = (-\infty, 0]$.

b) Zeigen Sie:

$$(X_t(A)^2 - Z_t(A))_{t \geq 0} \in \mathcal{M}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$((X_t(A) - X_t(-A))^2 - t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M} \text{ für } A = (0, \infty).$$

Hinweis zum letzten Prozess: $Z_t(\{0\}) = \lambda(s \leq t : W_s = 0) = 0$ P-f.s. $\forall t$.Aufgabe 20. (BM und Stoppzeiten) τ sei eine \mathbb{F} -Stoppzeit. Zeigen Sie:a) $((W_t^\tau)^2 - \tau \wedge t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}$, $\text{Var} W_t^\tau = E(\tau \wedge t), t \geq 0$.b) $1_{[0, \tau]} \in \mathcal{L}^2(W) \Leftrightarrow E\tau < \infty$.c) Im Fall $E\tau < \infty$:

$$\int_0^\infty 1_{[0, \tau]} dW = W_\tau,$$

$$EW_\tau = 0, \quad \text{Var} W_\tau = E\tau.$$

Hinweis: Satz 3.10.